Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0662.01.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ЮНИТА 1

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Москва 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН 4
ЛИТЕРАТУРА 5
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ 6
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР 8
Глава I. Введение. Классификация дифференциальных уравнений . 8
§1. Ряды Фурье 8
§2. Обыкновенные дифференциальные уравнения 14
§3. Дифференциальные уравнения с частными производными . . . 18
§4. Канонический вид линейных уравнений с частными производными второго порядка 23
§5. Оператор Лапласа 26
Глава II. Задача Штурма-Лиувилля 28
§1. Постановка задачи 28
§2. Основные свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля 31
§3. Решение задач Штурма-Лиувилля 33
§4. Разложение функций в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля 38
Глава III. Уравнения с частными производными второго порядка . 40
§1.Основные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям с частными производными 40
§2. Вывод уравнения колебаний струны 43
§3. Вывод уравнения теплопроводности 45
§4. Начальные условия 46
§5. Граничные условия 47
§6. Краевые задачи для нестационарных уравнений 50
§7. Краевые задачи для стационарных уравнений 52
Глава IV. Метод Фурье 53
§1. Общая схема метода Фурье 53
§2. Решение задачи для уравнения теплопроводности 54
§3. Решение задачи для волнового уравнения 56
§4. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье 59
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 63
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ 72
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ 82
ГЛОССАРИЙ*

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Ортогональные системы функций, ряды Фурье, теорема Дирихле, классификация дифференциальных уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши. Линейные дифференциальные уравнения. Линейный оператор и его свойства. Свойства линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с частными производными. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка. Канонический вид. Оператор Лапласа. Оператор Лапласа в полярных, в цилиндрических и сферических координатах. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Штурма-Лиувилля. Собственные функции и собственные значения и их свойства. Ряд Фурье–функций по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя. Основные задачи, приводящие к уравнениям математической физики. Начальные условия, граничные условия. Краевые задачи математической физики. Задача Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Краевые задачи для нестационарных уравнений. Краевые задачи для стационарных уравнений. Метод Фурье. Общая схема метода Фурье. Решение смешанной задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом Фурье. Решение внутренней и внешней задачи Дирихле для круга.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М., 1969.

Дополнительная

2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.

3. Тихонов А.И. , Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.,1972.

4. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., 1977.

5. Кошляков И.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.

6. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М., 1985.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 2. М., 1998.

8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., 1985.

9. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. М., 1974.

10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. М., 1997.

Примечание. При написании тематического обзора были использованы все источники

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1	2	3
1.	Разложить функцию по ортогональной системе функций	1. Вычислить нормы функций, входящих в ортогональную систему. 2. Вычислить коэффициенты ряда Фурье по ортогональной системе. 3. Записать ряд Фурье функции.
2	Решить краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения $y'' + \lambda y = 0$, где λ - заданная постоянная	1. Найти общее решение дифференциального уравнения. 2. Подставить краевые условия и определить значения произвольных постоянных. 3. Подставить полученные значения постоянных в общее решение и записать решение краевой задачи
3	Решить задачу Штурма-Лиувилля для уравнения $y'' + \lambda y = 0$. Проверить ортогональность собственных функций	1. Предположить $\lambda < 0$ и найти общее решение дифференциального уравнения. 2. Подставить краевые условия и проверить отсутствие собственных значений и собственных функций. 3. Предположить $\lambda = 0$ и найти общее решение дифференциального уравнения. 4. Подставить краевые условия и найти собственную функцию, если она существует. 5. Предположить $\lambda > 0$ и найти общее решение дифференциального уравнения. 6. Подставить краевые условия и найти собственные значения и собственные функции. 7. Проверить ортогональность собственных функций.
4	Решить краевую задачу для волнового уравнения методом Фурье. Вычислить приближенно значение решения в точке (x_0, t_0)	1. Методом Фурье провести разделение переменных в волновом уравнении и использовать граничные условия. 2. Решить задачу Штурма-Лиувилля. 3. Подставить собственные значения во второе уравнение, найти его общее решение.

1	2	3
		4. Составить решение уравнения с частными производными, удовлетворяющее граничным условиям, в виде функционального ряда. 5. Подставив в решение начальные условия, найти коэффициенты ряда. 6. Выписать решение краевой задачи, подставив найденные коэффициенты. 7. Вычислить приближенное значение решения, взяв несколько первых членов ряда и подставив значения переменных $x = x_0$, $t = t_0$.
5	Решить краевую задачу для уравнения теплопроводности методом Фурье. Вычислить приближенно значение решения в точке (x_0, t_0)	1. Методом Фурье провести разделение переменных в уравнении теплопроводности и использовать граничные условия. 2. Решить задачу Штурма-Лиувилля. 3. Подставить собственные значения во второе уравнение, найти его общее решение. 4. Составить общее решение уравнения с частными производными, удовлетворяющее граничным условиям, в виде функционального ряда. 5. Подставив в решение начальные условия, найти коэффициенты ряда. 6. Выписать решение краевой задачи, подставив найденные коэффициенты. 7. Вычислить приближенное значение решения, взяв несколько первых членов ряда и подставив значения переменных $x = x_0$, $t = t_0$.

ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Большинство явлений в самых разных областях физики - динамике жидкости, электричестве и магнетизме, механике, оптике, акустике и т.д. - может быть описано с помощью дифференциальных уравнений. В простейших моделях физических процессов это могут быть обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной. Однако полное описание таких процессов обычно приводит к уравнениям с частными производными, содержащими несколько независимых переменных.

При решении уравнений с частными производными используется разнообразный математический аппарат: ряды, в том числе ряды Фурье; теория функций комплексного переменного; интегральные преобразования, в первую очередь преобразования Фурье и Лапласа; теория линейных и нелинейных операторов; а также теория обыкновенных дифференциальных уравнений.

§1. Ряды Фурье

Ряд Фурье является частным случаем функциональных рядов. Функциональным рядом называется выражение вида

$$U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_k(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x),$$

где $U_1(x)$, $U_2(x)$, ... , $U_k(x)$, ... - функции, зависящие от одной переменной x или от нескольких переменных (тогда через x обозначают точку в пространстве: $x = (x_1, \ldots, x_n)$). В дальнейшем мы чаще всего будем использовать функции двух и трех переменных. Но пока вспомним основные понятия и определения теории рядов, в которых функции $U_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, определены в некотором интервале оси OX. При каждом фиксированном значении $x = x_0$ из этого интервала функциональный ряд превращается в числовой ряд

$$U_1(x_0) + U_2(x_0) + \ldots + U_k(x_0) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x_0),$$

который может сходиться, а может и расходиться. В первом случае точка $x = x_0$ называется точкой сходимости функционального ряда. Множество всех точек сходимости называется **областью сходимости ряда.** В базовом курсе математики рассматриваются степенные ряды

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Областью сходимости такого ряда является либо одна точка $x = x_0$, либо интервал радиуса R с центром в точке x_0 : $(x_0 - R, x_0 + R)$, либо вся прямая: $(-\infty, +\infty)$. Определение области сходимости функционального ряда (в общем случае) представляет трудную задачу.

В теории тригонометрических рядов рассматриваются ортогональные системы функций. Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на отрезке[a, b] (или в интервале (a, b)), если

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = 0.$$

При этом предполагается, что $\int_a^b \varphi^2(x) dx \neq 0$ и $\int_a^b \psi^2(x) dx \neq 0$. Система функций $\{\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ - **ортогональна на отрезке [a, b]** (или в интервале (a, b)), если

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0 \text{ при } n \neq m, (n, m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Здесь тоже предполагается, что $\int_a^b \varphi_n{}^2(x) dx \neq 0$ при n = 0, 1, 2, ... Иными словами, система функций $\{\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ортогональна на отрезке [a, b], если все функции попарно ортогональны. Число

$$||\varphi_n(x)|| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}$$

называется **нормой функции $\varphi_n(x)$**. Если все функции $\varphi_n(x)$ имеют единичную норму и система ортогональна на [a, b], то такая система функций называется **ортонормированной**. Простейшим примером ортогональной системы функций служит тригонометрическая система

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\} \qquad (1)$$

на отрезке $[-\pi, +\pi]$. Чтобы убедиться в этом, надо вычислить следующие интегралы:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$. Поэтому $\|1\| = \sqrt{2\pi}$.

2. $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = \frac{1}{n} \sin n x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ при n = 1, 2, ...

3. $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = -\frac{1}{n} \cos n x \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\cos(-n\pi) = 0$ при n = 1, 2, ...

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos(n+m)x}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi} -$

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos(n-m)x}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2(n+m)}(\cos(n+m)\pi - \cos(n+m)\pi) -$$

$$-\frac{1}{2(n-m)} \cdot (\cos(n-m)\pi - \cos(n-m)\pi) = 0$$ при $n \neq m$, n, m = 1, 2, 3, ...

Если n = m, то $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2 nx}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

Аналогично вычисляются и другие интегралы:

5. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\,dx = \frac{1}{2(n-m)} \sin(n-m)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(n+m)} \sin(n+m)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

при $n \neq m$; n, m = 1, 2, 3, ... Если n = m, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$ Значит, $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$.

6. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx\,dx = \frac{1}{2(n+m)} \sin(n+m)x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(n-m)} \sin(n-m)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

при $n \neq m$, n, m = 1, 2, 3, ... Если n = m, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

То есть $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$.

Таким образом, доказано, что система (1) на отрезке $[-\pi, +\pi]$ ортогональная, но неортонормированная. Если функции в системе (1) нормировать, то есть взять систему

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{sinx}{\sqrt{\pi}}, \frac{cosx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sin2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{cos2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{sinnx}{\sqrt{\pi}}, \frac{cosnx}{\sqrt{\pi}}, \ldots\},$$

то такая система функций будет ортонормированной. Приведем еще примеры ортогональных систем:

{1, cosx, cos2x, ... ,cosnx, ...} на отрезке [0, π],

{sinx, sin2x, ... , sinnx, ...} на отрезке [0, π],

$\{1, \sin\frac{\pi}{\ell}x, \cos\frac{\pi}{\ell}x, \sin\frac{2\pi}{\ell}x, \cos\frac{2\pi}{\ell}x, \ldots, \sin\frac{\pi n}{\ell}x, \cos\frac{\pi n}{\ell}x, \ldots\}$ на отрезке $[-\ell, \ell]$,

$\{1, \cos\frac{\pi}{\ell}x, \cos\frac{2\pi}{\ell}x, \ldots, \cos\frac{\pi n}{\ell}x, ..\}$ на отрезке $[0, \ell]$,

$\{\sin\frac{\pi}{\ell}x, \sin\frac{2\pi}{\ell}x, \ldots, \sin\frac{\pi n}{\ell}x, \ldots\}$ на отрезке $[0, \ell]$.

В главе II мы познакомимся с примерами других, не тригонометрических, ортогональных систем функций.

Тригонометрическим рядом Фурье функции f(x), имеющей период $T = 2\ell$, называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{\ell}x + b_n \sin\frac{\pi n}{\ell}x, \qquad (2)$$

в котором коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}xdx,\ b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}xdx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

При этом говорят, что ряд (2) порожден функцией f(x), а коэффициенты a_0, a_n, b_n называются **коэффициентами Фурье**.

В случае, когда функция f(x) имеет период $T = 2\pi$, ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx),$$

и коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Для четных функций ряд Фурье (2) содержит только члены $\frac{a_0}{2}$ и $a_n\cos\frac{\pi n}{\ell}x$,

для нечетных функций - только члены $b_n \sin\frac{\pi n}{\ell} x$. В этих случаях коэффициенты Фурье удобнее вычислять по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx \ , \ a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}xdx \ , \ b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}xdx \ .$$

Важное значение имеют вопросы о том, при каких x ряд Фурье сходится и в каком случае сумма ряда в точке x равна значению функции f(x), порождающей этот ряд. Ответ на эти вопросы дает теорема Дирихле.

Функция f(x) на отрезке [a, b] удовлетворяет **условиям Дирихле**, если

a) f(x) на отрезке [a, b] непрерывна или имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва I рода;

b) в каждом интервале непрерывности f(x) монотонна, либо имеет на этом интервале конечное число точек экстремума.

Например, функция, изображенная на рис. 1, удовлетворяет условиям Дирихле.

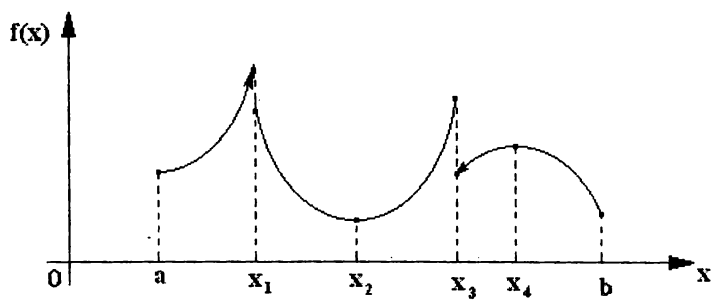

Рис. 1

Теорема Дирихле. Функция f(x), периодическая с периодом $T = 2\ell$, удовлетворяющая условиям Дирихле на отрезке $[-\ell, \ell]$, разлагается в тригонометрический ряд Фурье (2), причем:

a) в каждой точке непрерывности x функции f(x) ряд Фурье (2) сходится к значению f(x);

b) в каждой точке разрыва x_i функции f(x) ряд Фурье (2) сходится к значению

$\frac{1}{2}[f(x_i - 0) + f(x_i + 0)]$, где $f(x_i - 0) = \lim\limits_{x \to x_i - 0} f(x)$, $f(x_i + 0) = \lim\limits_{x \to x_i + 0} f(x)$.

В дальнейшем при решении уравнений с частными производными

нам придется почленно дифференцировать ряды Фурье, причем несколько раз. В связи с этим возникает вопрос: когда это можно делать? То есть, при каких условиях ряды, составленные из производных членов данного ряда, сходятся? Кроме того, в каком случае суммы таких рядов будут равны соответствующим производным данной функции? Полностью ответы на эти вопросы выходят за рамки нашего курса. Однако отметим, что если функция не только непрерывна, но и имеет достаточное число непрерывных производных, то эти действия справедливы. Именно такие функции и будут рассматриваться в последующих главах.

Тригонометрический ряд Фурье является частным случаем рядов, которые получаются для произвольных систем функций, ортогональных на отрезке [a, b]. Причем сами функции не обязаны быть периодическими.

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_n(x), k = 0, 1, 2, ...\}$, ортогональную на отрезке [a, b]. **Рядом Фурье функции f(x) по ортогональной системе функций $\{\varphi_n(x)\}$** называется ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\varphi_n(x)$, в котором **коэффициенты Фурье** C_n вычисляются по формулам

$$C_n = \frac{1}{\|\varphi_n(x)\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \ .$$

Если система функций $\{\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, ...\}$ ортонормированная, то коэффициенты Фурье равны

$$C_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx.$$

Вопрос о сходимости этих рядов Фурье изучается в специальной научной литературе. Один из результатов будет сформулирован в главе II (теорема Стеклова).

Теперь вернемся к тригонометрическим системам функций

$$\{1, \cos\frac{\pi}{\ell}x, \cos\frac{2\pi}{\ell}x, \ ... \ , \cos\frac{\pi n}{\ell}x, \ ...\}$$

и

$$\{\sin\frac{\pi}{\ell}x, \sin\frac{2\pi}{\ell}x, \ ... \ , \sin\frac{\pi n}{\ell}x, \ ...\}$$

на отрезке $[0, \ell]$. Функцию f(x) будем также рассматривать только на отрезке $[0, \ell]$. Тогда ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{\pi n}{\ell}x$ называется рядом Фурье

функции f(x) по косинусам, если коэффициенты $a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx$ и

$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}xdx$, n = 1, 2, 3, ... Ряд $\cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{\ell}x$ называется рядом

Фурье функции f(x) по синусам, если $b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}xdx$. Относительно

сходимости этих рядов справедлива теорема, аналогичная теореме Дирихле. А именно, если функция f(x) удовлетворяет на отрезке $[0, \ell]$ условиям Дирихле, то ряд по косинусам и ряд по синусам сходятся. Причем в тех точках, где f(x) непрерывна, суммы рядов равны значению функции. В точках разрыва функции f(x) суммы рядов равны среднему арифметическому значений левостороннего и правостороннего пределов. На концах отрезка сумма ряда по косинусам совпадает со значениями функции, а сумма ряда по синусам равна нулю.

§2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

В курсе математического анализа (Юнита №3) была изложена теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь мы приведем только те основные понятия и теоремы, которые будут нужны в следующих главах.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, в котором функция F зависит от независимой переменной x, неизвестной функции $y = y(x)$ и ее производных $y', \ldots, y^{(n)}$. Порядком дифференциального уравнения называется высший из порядков, входящих в это уравнение производных искомой функции. Если производная высшего порядка выражена из уравнения явно, то уравнение будет иметь вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной.

Решением обыкновенного дифференциального уравнения называется функция y(x), определенная в некотором интервале (a, b) оси OX, которая после подстановки ее вместе с производными в это уравнение обращает его в тождество по x.

Задачей Коши для уравнения (3) называется задача об отыскании такого решения уравнения (3), которое удовлетворяет условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

где $x_0 \in (a, b)$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ - заданные числа. Эти дополнительные условия называются **начальными условиями**. В частности, задача Коши для уравнения первого порядка имеет вид: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Задача Коши для уравнения второго порядка имеет вид: $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Теорема Коши отвечает на вопрос о разрешимости задачи Коши и о единственности решения. Приведем формулировку этой теоремы в двух частных случаях:

Случай 1. Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области $\mathcal{D}$ изменения переменных x и y, содержащей внутри точку (x_0, y_0), и имеет в этой области непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. Тогда существует и притом единственное решение $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию.

Случай 2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Пусть функция $f(x, y, y')$ определена и непрерывна в некоторой области $\mathcal{D}$ изменения трех переменных x, y, y', содержащей внутри точку (x_0, y_0, y_1), и имеет в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$. Тогда существует и притом единственное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Самым простым и хорошо изученным типом дифференциальных уравнений являются линейные уравнения. **Линейным дифференциальным уравнением** называется уравнение, в которое неизвестная функция и ее производные входят линейным образом (то есть в первой степени). **Общий вид линейного обыкновенного дифференциального уравнения порядка n** следующий:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x). \qquad (4)$$

Функции $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ называются коэффициентами, $f(x)$ – правой частью уравнения. Это известные функции. Если правая часть $f(x) \equiv 0$, то такое уравнение называется **однородным**. В случае, когда $f(x) \not\equiv 0$, уравнение называется **неоднородным**. (В частности, линейное неоднородное уравнение первого порядка имеет вид $a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$, линейное неоднородное уравнение второго порядка записывается в виде $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$).

Теорема о структуре общего решения однородного линейного уравнения n - го порядка. Если коэффициенты уравнения

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0 \qquad (5)$$

непрерывные функции в интервале (a, b), то общее решение уравнения (5) имеет вид

$$y = C_1y_1(x) + ... + C_ny_n(x),$$

где $\{ y_1(x), ... , y_n(x)\}$ – линейно независимая система частных решений уравнения, C_i – произвольные постоянные.

Напомним, что система функций $\{\varphi_1(x), ... , \varphi_n(x)\}$ называется **линейно независимой в (a, b)**, если линейная комбинация $C_1\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_n(x)$ тождественно равна нулю в интервале (a, b) только тогда, когда все $C_i = 0$, $i = 1, ... , n$.

Теорема о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения n - го порядка. Если коэффициенты и правая часть уравнения (4) непрерывные функции в интервале (a, b), то общее решение Y уравнения имеет вид $Y = y + \bar{y}$, где y – общее решение однородного уравнения (5), соответствующего данному неоднородному, $\bar{y}$ – какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Решение. Данное уравнение – линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Частные решения такого уравнения получаются с помощью характеристического уравнения. Напомним, что **характеристическим уравнением** называется алгебраическое уравнение, которое получается из однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, если в нем формально заменить y на единицу, y′ на r, y″на r^2 и т.д. В нашем примере характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что функции $y_1 = e^{-x}\cos 2x$ и $y_2 = e^{-x}\sin 2x$ являются линейно независимыми частными решениями данного дифференциального уравнения и общее решение согласно теореме о структуре общего решения записывается в виде

$$y = C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = e^x.$$

Решение. Вначале решим однородное уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $r^2 + 3r + 2 = 0$ имеет корни $r_1 = -2$, $r_2 = -1$.

Следовательно, функции $y_1 = e^{-2x}$ и $y_2 = e^{-x}$ являются линейно независимыми частными решениями однородного уравнения. По теореме о структуре общего решения функция

$$y = C_1e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$

является общим решением однородного уравнения. Для того, чтобы найти какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения, воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Идея этого метода состоит в том, что для правых частей неоднородного уравнения, имеющих специальный вид, частное решение подбирают в виде некоторой функции с неопределенными коэффициентами. Вид этой функции зависит от вида правой части и корней характеристического уравнения. В нашем примере $\bar{y} = Ae^x$. Подставим функцию $\bar{y}$ в уравнение и получим

$$(Ae^x)'' + 3(Ae^x)' + 2(Ae^x) = e^x \Rightarrow 6\,Ae^x = e^x \Rightarrow 6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, функция $\bar{y} = \frac{1}{6}e^x$ является частным решением неоднородного уравнения. Следовательно, по теореме о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения имеем

$$Y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{6}e^x.$$

Пример 3. Решить задачу Коши

$$y'' + 4y = \cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения, соответствующего данному уравнению:

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = \pm 2i \Rightarrow y_1 = \cos 2x,\ y_2 = \sin 2x \Rightarrow y =$$

$$= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Подберем частное решение методом неопределенных коэффициентов:

$$\bar{y} = a\cdot\cos x + b\cdot\sin x \Rightarrow \bar{y}'' + 4\bar{y} = (a\cdot\cos x + b\cdot\sin x)'' + 4(a\cdot\cos x + b\cdot\sin x) \equiv \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a\cdot\cos x + 3b\cdot\sin x = \cos x \Rightarrow 3a = 1,\ 3b = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3},\ b = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{3}\cos x.$$

Выпишем общее решение данного уравнения:

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\cos x.$$

Подставим в общее решение первое начальное условие:

$$1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{1}{3}\cos 0 \Rightarrow 1 = C_1 + \frac{1}{3} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}.$$

Продифференцируем общее решение и подставим второе начальное условие:

$$Y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x - \frac{1}{3}\sin x,$$

$$0 = -2C_1\sin 0 + 2C_2\cos 0 - \frac{1}{3}\sin 0$$

или

$$0 = 2C_2, \text{ то есть } C_2 = 0.$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$y = \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos x.$$

§3. Дифференциальные уравнения с частными производными

Здесь и далее будем рассматривать функции нескольких переменных $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $n \geq 2$. Если $n = 2$, то переменные обычно обозначаются через x и y, либо x и t, причем, как правило, через t обозначается момент времени, через x - координата точки на прямой. В случае $n = 3$ переменные обозначаются через x, y, z либо x, y, t. Если $n = 4$, то (x, y, z) - координаты точки в пространстве, а t - момент времени. Частные производные функции многих переменных U иногда удобно обозначать так:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = U_t, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{xx}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = U_{xt}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = U_{tt} \text{ и т.п.}$$

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение вида

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_{x_n}^{i_n}}\right) = 0,$$

где $i_1 + \ldots + i_n = k$. Иными словами, уравнение с частными производными связывает между собой независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(n \geq 2)$, неизвестную функцию $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ее частные производные до некоторого порядка. Порядком дифференциального уравнения с частными производными называется высший из порядков, входящих в это уравнение, частных производных искомой функции. Например, уравнение $2y^2\frac{\partial U}{\partial x} + xy\frac{\partial U}{\partial y} + xU = 0$ имеет первый порядок, а уравнения $U_t = U_{xx}$, $U_{xt} = 0$ и $U_{tt} = U_{xx}$ являются уравнениями второго порядка.

Решением уравнения с частными производными называется функция $U(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенная в некоторой области $\mathcal{D}$ пространства R^n, которая после подстановки ее и соответствующих ее производных в данное уравнение обращает его в тождество по $x_1, x_2, ..., x_n$.

В настоящее время теория дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными, очень интенсивно развивается. Причем исследование таких уравнений в самом общем виде – очень трудная задача. Наиболее полно изучен частный тип уравнений – линейные уравнения. В нашем курсе мы будем рассматривать именно такие уравнения.

Линейное дифференциальное уравнение с частными производными - это уравнение, в которое неизвестная функция и ее частные производные входят линейным образом. **Общий вид линейного уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными** следующий

$$a(x, y)\, U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = f(x, y), \qquad (6)$$

где коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и правая часть $f(x, y)$ - известные функции двух переменных.

Линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными в общем виде записывается так:

$$A(x, y)U_{xx} + B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + D(x, y)\, U_x + E(x, y)U_y + G(x, y)U = f(x, y), \qquad (7)$$

где коэффициенты A, B, C, D, E, G и правая часть f – известные функции двух переменных. Если правая часть $f(x, y)$ линейного уравнения (6) или (7) тождественно равна нулю в той области $\mathcal{D}$, где рассматривается это уравнение, то в этом случае уравнение (6) или (7) называется **однородным**. Если $f(x, y) \not\equiv 0$ в области $\mathcal{D}$, то уравнение называется **неоднородным**.

Среди линейных уравнений второго порядка есть уравнения, которые имеют особое значение. Перечислим их:

1. Волновое уравнение (одномерное)

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \qquad (8)$$

2. Волновое уравнение в плоскости

$$U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy}) \qquad (9)$$

3. Волновое уравнение в пространстве

$$U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) \qquad (10)$$

4. Уравнение теплопроводности (одномерное)

$$U_t = a^2 U_{xx} \qquad (11)$$

5. Уравнение теплопроводности в плоскости

$$U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}) \qquad (12)$$

6. Уравнение теплопроводности в пространстве

$$U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) \quad (13)$$

7. Уравнение Лапласа в плоскости

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad (14)$$

8. Уравнение Лапласа в пространстве

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \quad (15)$$

Именно эти уравнения являются основными уравнениями математической физики. Они представляют собой простейшие модели реальных физических процессов. В главе III мы приведем вывод некоторых из них и рассмотрим свойства их решений.

При изучении дифференциальных уравнений их удобно классифицировать, так как свойства уравнений (и их решений) во многом зависят от того, к какому классу (или типу) они принадлежат. Причем классифицировать их можно по разным признакам. Прежде всего, дифференциальные уравнения бывают обыкновенными и с частными производными. Далее, как обыкновенные, так и уравнения с частными производными отличаются друг от друга порядком. Уравнения с частными производными можно классифицировать по числу независимых переменных. Например, уравнения (8), (11) и (14) - с двумя переменными, уравнения (9), (12) и (15) - с тремя, а уравнения (10) и (13) - с четырьмя переменными, хотя все они имеют второй порядок. Кроме того, дифференциальные уравнения бывают линейными и нелинейными. Нелинейные уравнения, в отличие от линейных, содержат неизвестную функцию и (или) ее производные в других степенях, кроме первой. Некоторые нелинейные обыкновенные уравнения Вы умеете решать, например, уравнения Бернулли $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ (см. Юниту №3). Линейные уравнения, в свою очередь, можно классифицировать по более глубоким признакам. Такие уравнения бывают однородными и неоднородными. Кроме того, если все коэффициенты линейного уравнения постоянные, то оно называется линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Чуть позже Вы узнаете, что линейные уравнения с постоянными коэффициентами с частными производными второго порядка и с двумя независимыми переменными бывают трех типов - параболические, гиперболические и эллиптические, а в случае переменных коэффициентов бывают еще и уравнения смешанного типа.

Линейные уравнения, как обыкновенные, так и с частными производными. обладают некоторыми общими свойствами. Вместе с тем, уравнения с частными производными имеют и некоторые специфические свойства. Вначале рассмотрим общие свойства линейных уравнений. Для этого введем понятие линейного дифференциального оператора. Рассмотрим уравнение (4) и левую часть этого уравнения обозначим через Ly:

$$Ly \equiv a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y. \qquad (16)$$

Выражение (16) будем называть *линейным дифференциальным оператором от функции y*. Понятие линейного дифференциального оператора можно рассматривать как некоторый аналог понятия функции. Действительно, функция f(x) ставит в соответствие числу x новое число f(x), а оператор Ly ставит в соответствие функции y новую функцию Ly. Например, $Ly \equiv y'' - xy' + 2y$. Тогда для функции $y = x^3$ получим $Lx^3 = (x^3)'' - x(x^3)' + 2x^3 = 6x - x^3$, то есть функции $y = x^3$ ставится в соответствие функция $Ly = 6x - x^3$. Для функции $y = \sin x$ имеем $L\sin x = \sin x - x\cos x$.

Аналогично в уравнениях (6) и (7) левые части обозначим через L_1U и L_2U:

$$L_1U \equiv a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U, \qquad (17)$$

$$L_2U \equiv A(x, y)U_{xx} + B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + D(x, y)U_x + E(x, y)U_y + G(x, y)U. \qquad (18)$$

Выражения L_1U и L_2U - также линейные дифференциальные операторы, только в отличие от (16) они содержат частные производные и определены для функций U(x, y) с двумя независимыми переменными. В дальнейшем через LU будем обозначать произвольный линейный дифференциальный оператор с частными производными, а через L_1U и L_2U - операторы (17) и (18).

Независимо от конкретного вида линейные операторы обладают двумя свойствами:

1) если k - постоянная, то $L(kU) = k\,LU$ (однородность);

2) $L(U_1 + U_2) = LU_1 + LU_2$ (аддитивность).

Эти свойства вытекают из свойств производных любого порядка. Свойства 1) и 2) можно записать и так: если k_1 и k_2 - постоянные, то $L(k_1U_1 + k_2U_2) = k_1LU_1 + k_2LU_2$.

Проведем доказательство этого равенства, например, для оператора первого порядка L_1U вида (17):

$$L_1(k_1U_1 + k_2U_2) \equiv a(x, y)(k_1U_1 + k_2U_2)_x + b(x, y)(k_1U_1 + k_2U_2)_y +$$

$$+ c(x, y)(k_1U_1 + k_2U_2) = a(x, y)\,k_1U_{1x} + a(x, y)\,k_2U_{2x} + b(x, y)\,k_1U_{1y} +$$

$$+ b(x, y)\,k_2U_{2y} + c(x, y)\,k_1U_1 + C(x, y)\,k_2U_2 = k_1(a(x, y)\,U_{1x} + b(x, y)\,U_{1y} +$$

$$+ c(x, y)\,U_1) + k_2(a(x, y)\,U_{2x} + b(x, y)\,U_{2y} + c(x, y)\,U_2) \equiv k_1L_1U_1 + k_2L_2U_2.$$

Это свойство справедливо и в случае линейной комбинации нескольких функций ($m \geq 2$):

$$L(k_1U_1 + \ldots + k_mU_m) = k_1LU_1 + \ldots + k_mLU_m \qquad (19)$$

Используя свойство (19) нетрудно получить свойства решений линейных уравнений. Но прежде заметим, что всякое линейное уравнение, будь оно обыкновенным или с частными производными, с помощью

линейного оператора можно записать в виде LU = f. Если f ≡ 0, то получим однородное уравнение LU = 0.

Свойство 1. Если U_1, ..., U_m - решения линейного однородного уравнения LU = 0, то их линейная комбинация $k_1U_1 + ... + k_mU_m$ также является решением этого уравнения.

$$L(k_1U_1 + ... + k_mU_m) = k_1LU_1 + ... + k_mLU_m. \quad (20)$$

Доказательство. Используя свойство (19) получим
Далее, по условию для каждой функции $LU_i \equiv 0$, i = 1, ... , m, (так как U_i – решения уравнения). Таким образом, правая часть равенства (20) равна нулю, то есть линейная комбинация решений тоже является решением уравнения LU = 0.

Свойство 2. Если U_1 и U_2 – два решения линейного неоднородного уравнения LU = f, то их разность $U_1 - U_2$ является решением соответствующего однородного уравнения LU = 0.

Доказательство. Применим свойство (19) к разности функций $U_1 - U_2$ и получим $L(U_1 - U_2) = LU_1 - LU_2 = f - f = 0$ (по условию $LU_1 \equiv f$ и $LU_2 \equiv f$). Это означает, что разность $U_1 - U_2$ является решением однородного уравнения LU = 0.

Свойство 3. Если U_1 – решение линейного неоднородного уравнения LU = f и U_2 – решение соответствующего однородного уравнения LU = 0, то сумма $U_1 + U_2$ является решением того же неоднородного уравнения.

Доказательство. Применим свойство (19) к сумме функций $U_1 + U_2$ и получим $L(U_1 + U_2) = LU_1 + LU_2 = f$, так как по условию $LU_1 \equiv f$ и $LU_2 \equiv 0$.

Наряду с этими общими свойствами уравнения с частными производными могут обладать и другими свойствами. Поясним это на примерах. Вначале рассмотрим обыкновенное уравнение второго порядка y'' = 0. Его общее решение получается двумя последовательными интегрированиями и имеет вид $y = C_1x + C_2$, где C_1 и C_2 – две произвольные постоянные. Аналогично, общее решение любого линейного дифференциального уравнения второго порядка может быть записано в виде $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (см. теоремы о структуре общего решения линейного однородного и неоднородного уравнений). Оно представляет собой определенную функцию φ, зависящую от x и двух произвольных постоянных. Теперь решим уравнение второго порядка с частными производными $U_{yx} = 0$. Для этого первый раз будем интегрировать по переменной y (считая при этом x постоянной): $\frac{\partial U_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow U_x = \varphi(x)$, где φ(x) - произвольная функция от x. Полученное равенство проинтегрируем еще раз, теперь уже по x, считая y постоянной величиной: $\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi(x) \Rightarrow$ $U = \int \varphi(x)dx = C_1(x) + C_2(y)$, где $C_1(x)$ - первообразная от произвольной функции φ(x) и потому тоже произвольная (дифференцируемая)

функция, $C_2(y)$ также произвольная функция от y. Таким образом, общее решение уравнения $U_{xy} = 0$ зависит от двух произвольных функций.

Например, легко проверить, что функции $U = \sin x - y^2$, $U = \frac{1}{x} - \operatorname{tg} y$, $U = x^2 + \ln y$ и т.д. являются решениями этого уравнения.

В дальнейшем нам придется столкнуться еще и с таким свойством линейных уравнений с частными производными: эти уравнения могут иметь бесконечное множество линейно независимых решений, то есть такое бесконечное множество решений, из которых любое конечное число образуют линейно независимую систему. В соответствии с этим нам придется иметь дело не только с линейными комбинациями конечного числа решений, но и с рядами, членами которых служат произведения произвольных постоянных на решения уравнений. Эти ряды при определенных условиях, которым должны удовлетворять их члены, также будут решениями уравнений. Для того, чтобы пояснить только что сказанное, приведем в качестве примера один результат, который будет получен в §3 главы IV. Рассмотрим уравнение второго порядка $U_{xx} = U_{yy}$ и проверим, что функции $U_n = \sin nx \cdot \cos ny$, $n = 1, 2, \ldots$, являются решениями этого уравнения. В самом деле, $\frac{\partial U_n}{\partial x} = n \cos nx \cdot \cos ny$, $\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} = -n^2 \sin nx \cdot \cos ny$. Аналогично, $\frac{\partial U_n}{\partial y} = -n \sin nx \cdot \sin ny$, $\frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} = -n^2 \sin nx \cdot \cos ny$. Поэтому при подстановке их в данное уравнение получаются тождества по x и y. Этих решений бесконечно много, причем любое конечное число их образует линейно независимую систему функций. Составим ряд из этих функций с произвольными постоянными коэффициентами

$$C_1 \sin x \cos y + C_2 \sin 2x \cos 2y + \ldots + C_n \sin nx \cos ny + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx \cos ny . \quad (21)$$

Предположим, что этот ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать. Тогда очевидно, что при подстановке полученных выражений в данное уравнение мы опять придем к тождеству. Значит, ряд (21) является решением.

Для обыкновенных уравнений также существует бесконечно много решений, но линейно независимых среди них имеется только конечное число (см. теоремы о структуре общего решения линейного однородного и неоднородного уравнений).

В последующих параграфах нам не раз придется почленно дифференцировать и интегрировать функциональные ряды. Вопрос о том, в каких случаях это можно делать, является очень трудным. Поэтому, не вдаваясь в подробности, отметим еще раз, что мы будем рассматривать только такие ряды и, соответственно, такие функции, порождающие эти ряды, для которых все названные действия будут

справедливы.

§4. Канонический вид линейных уравнений с частными производными второго порядка

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными x и y общего вида (7):

$$A(x, y)U_{xx} + B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + D(x, y)U_x + E(x, y)U_y + G(x, y)U = f(x, y).$$

Уравнение (7) называется **гиперболическим в точке (x_0, y_0)**, если величина $\delta(x_0, y_0) \equiv B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) > 0$, **эллиптическим** – если величина $\delta(x_0, y_0) < 0$ и **параболическим**, если $\delta(x_0, y_0) = 0$. Линейное уравнение (7) называется **гиперболическим в области $\mathcal{D}$**, если оно гиперболическое в каждой точке этой области. Соответственно, линейное уравнение (7) называется **эллиптическим (параболическим) в области $\mathcal{D}$**, если оно эллиптическое (параболическое) в каждой точке этой области. Простейшим примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение (8). Для этого уравнения величина $\delta(x, t) \equiv B^2 - 4AC = 4a^2 > 0$ всюду в плоскости (x, t) . Примерами уравнений параболического и эллиптического типов являются уравнения (11) и (14), соответственно. Для уравнения (11) $\delta(x, t) \equiv 0$, а для (14) $\delta(x, t) \equiv -1$ всюду в плоскости.

Общее уравнение (7) в зависимости от типа с помощью некоторой замены независимых переменных $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ можно привести к одному из следующих видов:

1. $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = f'(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ (гиперболический тип);
2. $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = f'(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ (эллиптический тип);
3. $U_{\eta\eta} = f'(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ (параболический тип).

Уравнения вида 1 – 3 называются каноническим видом линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. При этом уравнение 1 называется **каноническим видом уравнений гиперболического типа**, уравнение 2 – **каноническим видом уравнений эллиптического типа**, уравнение 3 - **каноническим видом уравнений параболического типа**. В соответствии с этим уравнения (8), (11), (14) имеют канонический вид, если коэффициент a = 1.

Отметим, что тип уравнения определяется только коэффициентами при частных производных второго порядка и никак не зависит ни от коэффициентов при первых производных и самой функции, ни от свободного члена. При замене независимых переменных тип уравнения не меняется. Вместе с тем тип уравнения с переменными коэффициентами может меняться от точки к точке. Например, уравнение второго порядка $yU_{xx} + U_{yy} = 0$ при $y > 0$ имеет эллиптический тип, при $y < 0$ – гиперболический, а при $y = 0$ – параболический тип. Это уравнение имеет важное значение и часто встречается в газовой динамике. Оно

называется уравнением Трикоми.

Линейное уравнение второго порядка, имеющее в разных точках области определения разный тип, называется **уравнением смешанного типа**. Таким образом, уравнение Трикоми смешанного типа. В случае постоянных коэффициентов уравнение второго порядка всюду имеет один тип.

Приведение к каноническому виду проще всего проводится для уравнений с постоянными коэффициентами. Причем и замена переменных, с помощью которой получается канонический вид, также имеет наиболее простой вид - линейный. Разберем

Пример 4. Определить тип уравнения $U_{xy} = 0$ и привести его к каноническому виду.

Решение. Определить тип данного уравнения можно, не приводя его к каноническому виду. Для этого составим выражение $\delta(x, y) \equiv B^2 - 4AC = 1$. Так как $\delta(x, y) > 0$, то уравнение имеет гиперболический тип. Сделаем замену переменных $\xi = x + y$, $\eta = x - y$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\ ;\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\ .$$

Таким образом, данное уравнение в новых переменных имеет канонический вид 1: $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$. Иногда форму $U_{xy} = f(x, y, U, U_x, U_y)$ также называют каноническим видом уравнений гиперболического типа.

Классификация уравнений с постоянными коэффициентами и с большим числом независимых переменных выглядит не намного сложнее, чем для двух переменных. Однако мы не будем ее приводить. Отметим только, что волновое уравнение в плоскости (9) и в пространстве (10) в соответствии с этой классификацией относится к гиперболическому типу. Уравнение теплопроводности в плоскости (12) и в пространстве (13) – к параболическому типу. А уравнение Лапласа в пространстве (15) – к эллиптическому типу.

Вы можете спросить, зачем нужно так классифицировать и приводить к канонической форме уравнения с частными производными? Для этого имеется несколько причин. Во-первых, три типа уравнений – гиперболический, параболический и эллиптический – соответствуют трем различным видам физических процессов – волновым, диффузионным и стационарным, соответственно. Математические свойства решений этих типов уравнений совершенно различны. Во-вторых, сложное уравнение можно привести к каноническому виду, который хорошо изучен, и воспользоваться известными результатами. Во многих случаях бывает известен аналитический вид решений канонических уравнений. Возвращаясь к исходным координатам, получают решение данного уравнения. Проиллюстрируем это на одном примере.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} = 0$$

и приведем его к каноническому виду. Легко проверить, что это уравнение параболического типа. В самом деле, величина $\delta(x, y) \equiv B^2 - 4AC = = 4 - 4 = 0$. Значит, оно приводится к каноническому виду 3. Для этого сделаем замену переменных $\xi = y - x$, $\eta = y$:

$$U_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2};$$

$$U_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta};$$

$$U_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

После подстановки этих производных в данное уравнение получим уравнение $U_{\eta\eta} = 0$. Оно настолько простое, что, проведя дважды интегрирование, найдем его общее решение:

$$\frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow U_\eta = \varphi(\xi) \Rightarrow U = \eta \cdot \varphi(\xi) + \Psi(\xi),$$

где $\varphi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ – две произвольные функции. Возвращаясь к прежним координатам x и y, получим общее решение исходного уравнения:

$$U = y \cdot \varphi(y - x) + \Psi(y - x),$$

причем функции φ и Ψ можно брать любыми (конечно, они должны иметь производные второго порядка).

В-третьих, создано много программ для ЭВМ численного решения задач в случае уравнений канонического вида. Поэтому, преобразовав данную задачу к каноническому виду и решив ее с помощью стандартных программ, можно всегда вернуться к прежним координатам и получить решение исходной задачи.

§5. Оператор Лапласа

Оператором Лапласа (лапласианом) называется выражение вида:

а) в плоскости: $\Delta U \equiv U_{xx} + U_{yy}$,

б) в пространстве: $\Delta U \equiv U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$.

Это линейный дифференциальный оператор, содержащий частные производные второго порядка. Как всякий линейный оператор, он обладает теми же свойствами, что были сформулированы в §4. Однако помимо этих свойств у него есть и другие очень важные свойства, благодаря

которым он имеет столь большое значение не только в математической физике, но и во всей математике. Подробно эти свойства будут изучаться во второй юните, а сейчас мы сформулируем лишь одно (на наш взгляд, основное) свойство оператора ΔU.

Рассмотрим функцию U(x, y), определенную и непрерывную в некоторой области $\mathcal{D}$, и напомним определение среднего значения функции: средним значением функции f на окружности Γ радиуса R называется число $\frac{1}{2\pi R}\int_{\Gamma} f(x,y)\,dl$; средним значением функции в круге S радиуса R называется число $\frac{1}{\pi R^2}\iint_S f(x,y)\,dx\,dy$ . .

Теорема о среднем. Если функция U непрерывна в $\mathcal{D}$ и $\Delta U = 0$, то значение $U(x_0, y_0)$ в точке $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ равно среднему значению в «соседних» точках (то есть среднему значению по окружности или по кругу с центром в точке (x_0, y_0)).

Отметим, что эта теорема не зависит от числа переменных и справедлива также в пространстве, только там среднее значение берется или по сфере, или по шару радиуса R.

С помощью оператора Лапласа волновые уравнения (9) и (10) записываются так: $U_{tt} = \Delta U$, уравнения теплопроводности (12) и (13): $U_t = \Delta U$, и уравнения Лапласа (14) и (15): $\Delta U = 0$.

При решении многих задач возникает необходимость знать выражение лапласиана в других координатах, и прежде всего в полярных, цилиндрических и сферических. Полярные координаты (r, φ) связаны с прямоугольными координатами (x, y) следующими

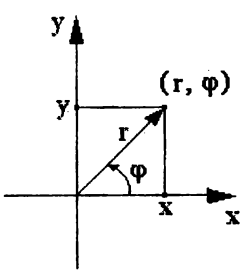

Рис. 2

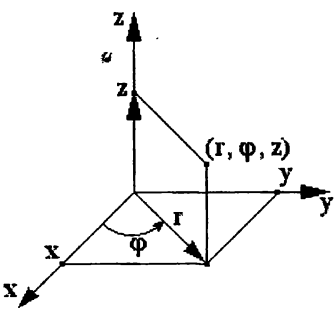

Рис. 3

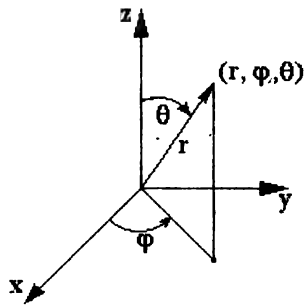

Рис. 4

соотношениями (см. рис. 2): $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$. Поэтому

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Из этих соотношений получаем:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\sin\varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Аналогично производные второго порядка запишутся в виде:

$$U_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial U_x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{\partial}{\partial r}(U_r\cos\varphi - U_\varphi\frac{\sin\varphi}{r})\cos\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi}(U_r\cos\varphi -$$

$$- U_\varphi\frac{\sin\varphi}{r})\frac{\sin\varphi}{r} = U_{rr}\cos^2\varphi - U_{\varphi r}\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r} + U_\varphi\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r^2} - U_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r} +$$

$$+ U_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + U_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + U_\varphi\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r^2};$$

$$U_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} = \frac{\partial U_y}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial U_y}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{\partial}{\partial r}(U_r\sin\varphi + U_\varphi\frac{\cos\varphi}{r})\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi}(U_r\sin\varphi +$$

$$+ U_\varphi\frac{\cos\varphi}{r})\frac{\cos\varphi}{r} = U_{rr}\sin^2\varphi + U_{\varphi r}\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r} - U_\varphi\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r^2} + U_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r} +$$

$$+ U_r\frac{\cos^2\varphi}{r} + U_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} - U_\varphi\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r^2}.$$

Подставив полученные выражения для частных производных второго порядка в оператор Лапласа, будем иметь

$$\Delta U \equiv U_{xx} + U_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi}.$$

В полярных координатах лапласиан, как нетрудно заметить, имеет переменные коэффициенты.

В пространстве оператор Лапласа иногда бывает удобно записывать в цилиндрических координатах (см. рис. 3), а иногда - в сферических координатах (см. рис. 4). Это зависит от области, в которой приходится решать задачу. Так как цилиндрические координаты - (r, φ, z), где (r, φ) - полярные координаты в плоскости ХОУ, а z - аппликата в прямоугольной системе, то

$$\Delta U \equiv U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} + U_{zz}.$$

Сферические координаты (r, φ, θ) связаны с прямоугольными (x, y, z)чуть сложнее:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta.$$

Поэтому формулы преобразования частных производных будут

громоздкими и мы приведем сразу окончательный результат:

$$\Delta U \equiv U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = U_{rr} + \frac{2}{r}U_r + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}U_\theta + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}U_{\varphi\varphi}.$$

ГЛАВА II. ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

В этой главе изучаются обыкновенные дифференциальные уравнения. При решении уравнений с частными производными часто возникают вспомогательные задачи, связанные с обыкновенными уравнениями. Далее

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] - q(x)y = 0. \qquad (22)$$

мы рассмотрим одну из них.

§1. Постановка краевой задачи

Будем рассматривать однородное линейное уравнение второго порядка $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Его можно записать по-другому:

или, используя оператор $Ly \equiv \frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] - q(x)y$, совсем коротко $Ly = 0$. Однородное уравнение $Ly = 0$ и неоднородное $Ly = f$, как известно (см. гл. *I*, §2), имеет бесконечное множество решений. На практике часто бывает нужно из множества решений выделить только одно. Для этого задают некоторые дополнительные условия. Если это начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, то

$$\begin{cases} \ell_1 y \equiv \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A, \\ \ell_2 y \equiv \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B, \end{cases} \qquad (23)$$

получают задачу Коши. Если задают дополнительные условия на концах некоторого отрезка, то получают задачу, которая называется **краевой задачей**. Условия, которые задаются на концах отрезка, называются краевыми условиями. Краевые условия иногда именуют также граничными условиями и тогда говорят о граничной задаче.

Мы будем задавать линейные краевые условия вида
где α_1, α_2, β_1, β_2, A, B - заданные числа, причем по крайней мере одно из чисел α_1, α_2, и одно из чисел β_1, β_2 отличны от нуля. Если в (23) хотя бы одно из чисел A и B не равно нулю, то краевые условия называют неоднородными. Если A =

$$L_\lambda y \equiv \frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + [\lambda r(x) - q(x)]y = 0, \qquad (24)$$

B = 0, то условия (23) называются однородными. Краевая задача называется однородной, если рассматривается однородное уравнение (22) $Ly = 0$ и

однородные краевые условия (23). **Решением краевой задачи** называется такое решение дифференциального уравнения, которое удовлетворяет заданным краевым условиям. Заметим сразу, что однородная краевая задача всегда имеет решение $y \equiv 0$ (тривиальное решение).

Наряду с уравнением (22) рассмотрим уравнение

содержащее некоторый числовой параметр λ. Здесь функции $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ действительные, а число λ может быть, вообще говоря, и комплексным. Краевая задача (24), (23) при $A = B = 0$ является однородной. Поэтому при любых λ она имеет тривиальное решение. Нас будут интересовать такие значения λ, при которых эта задача обладает не только тривиальными решениями.

Задача Штурма-Лиувилля. *Найти те значения параметра λ, при которых уравнение (24) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее однородным краевым условиям (23).* В дальнейшем будем ее записывать в виде $\{L_\lambda y = 0,\ \ell_1 y = 0,\ \ell_2 y = 0\}$.

Те значения параметра λ, при которых задача Штурма-Лиувилля имеет ненулевое решение, называются **собственными значениями** (собственными числами) задачи, а сами эти решения - **собственными функциями**. Задачу Штурма-Лиувилля называют также задачей на собственные значения. В силу однородности уравнения и краевых условий собственные функции задачи Штурма-Лиувилля определены с точностью до постоянного множителя. Это означает, что если $y(x)$ -

$$y'' + \lambda y = 0. \tag{25}$$

собственная функция при некотором значении λ, то произведение $Cy(x)$, где C - произвольная постоянная, также является собственной функцией при том же значении параметра λ. В связи с этим часто в качестве

$$y(a) = y(b) = 0, \tag{26}$$

$$y'(a) = y'(b) = 0, \tag{27}$$

собственной функции рассматривают нормированную функцию $y(x)$, у

$$\begin{cases} y'(a) = \sigma_1 y(a) \\ y'(b) = \sigma_2 y(b),\ \sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0. \end{cases} \tag{28}$$

которой $\|y(x)\| = 1$. Такая собственная функция определена, по существу, однозначно (с точностью до знака $\pm$).

Далее мы подробно изучим наиболее простой случай задачи Штурма-Лиувилля, когда уравнение (24) имеет вид

Из множества краевых условий вида (23) ограничимся тремя частными случаями:

1) краевые условия первого рода
2) краевые условия второго рода

3) краевые условия третьего рода

Общая задача Штурма-Лиувилля будет обладать свойствами, очень похожими на свойства в этих простых случаях, если на коэффициенты уравнения (24) наложить дополнительные условия: p(x), q(x), r(x) - непрерывные функции, причем p(x) имеет, кроме того, непрерывную производную на [a, b], $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$.

§2. Основные свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля

Лемма. Определитель Вронского двух собственных функций задачи Штурма-Лиувилля на концах отрезка [a, b] равен нулю.

Доказательство. Напомним, что определителем Вронского функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ называется определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Рассмотрим однородные краевые условия общего вида (23). Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - две любые собственные функции. Это означает, что в точке $x = a$ выполняются равенства

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a) = 0 \\ \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_2'(a) = 0 \end{cases}$$

Числа α_1 и α_2 не могут одновременно равняться нулю. Значит, алгебраическая система двух однородных уравнений с двумя неизвестными имеет ненулевое решение. Это возможно только в том случае, когда определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель совпадает с определителем Вронского в точке $x = a$, то есть $W(a) = 0$.

Аналогичные рассуждения, проведенные для точки $x = b$, показывают, что $W(b) = 0$.

Свойство 1. Две собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, соответствующие одному и тому же собственному значению λ, линейно зависимые.

Доказательство. Так как собственные функции являются решениями одного и того же однородного уравнения (по условию число λ одно), то в случае их линейной независимости определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке отрезка [a, b]. Это противоречит только что доказанной лемме. Следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно зависимые функции.

Свойство 2. Две собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), на отрезке [a, b]

ортогональны.

Доказательство этого свойства проведем для собственных функций такой задачи, в которой уравнение имеет вид (25). Составим определитель Вронского функций y_1 и y_2 и продифференцируем его:

$$W'(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}' = (y_1y'_2 - y_2y'_1)' = y'_1y'_2 + y_1y''_2 - y'_2y'_1 - y_2y''_1 = y_1y''_2 - y_2y''_1.$$

Так как y_1 и y_2 - решения уравнения (25) при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, соответственно, то получим

$$W'(x) = -y_1\lambda_2y_2 + y_2\lambda_1y_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, y_1y_2.$$

Проинтегрируем по отрезку [a, b] левую и правую части полученного равенства. С учетом леммы будем иметь

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b y_1y_2dy = \int_a^b W'(x)dx = W(x)\Big|_a^b = 0.$$

По условию $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, следовательно

$$\int_a^b y_1y_2dx = 0.$$

Функции $y_1(x) \not\equiv 0$ и $y_2(x) \not\equiv 0$, поэтому $\int_a^b y_i^2(x) \neq 0$, (i = 1, 2). Значит, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на отрезке [a, b] ортогональны.

Если уравнение, входящее в задачу Штурма-Лиувилля, имеет вид (24), где $r(x) > 0$ и $r(x) \not\equiv 1$, то под ортогональностью функций в этом случае подразумевают ортогональность с весом r(x): две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ **ортогональны на отрезке [a, b] с весом r(x)**, если

$$\int_a^b r(x)y_1(x)y_2(x)dx = 0.$$

Под нормой функции $\|y(x)\|$ в этом случае также подразумевают весовую норму:

$$\|y(x)\|^2 = \int_a^b r(x)y^2dy.$$

Свойство 3. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, образуют линейно независимую систему функций.

Это утверждение вытекает из попарной ортогональности собственных функций, соответствующих различным собственным значениям (см. свойство 2).

Свойство 4. Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля действительные.

Доказательство. Предположим, что задача Штурма-Лиувилля $\{L_\lambda y = 0,\ \ell_1 y = 0,\ \ell_2 y = 0\}$ имеет комплексное собственное значение $\lambda = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$.

Пусть ему соответствует собственная функция y(x) (вообще говоря, тоже комплекснозначная). Так как все коэффициенты уравнения и краевых условий имеют действительные значения, то $L_{\lambda}y = L_{\bar{\lambda}}\bar{y} = 0$, $\ell_1 y = \ell_1 \bar{y} = 0$, $\ell_2 y = \ell_2 \bar{y} = 0$. Здесь черта означает переход к комплексно сопряженному выражению. В нашем случае

$$L_{\bar{\lambda}}\bar{y} \equiv \frac{d}{dx}[p(x)\frac{d\bar{y}}{dx}] + (\bar{\lambda}r(x) - q(x))\bar{y}.$$

Значит число $\bar{\lambda} = \alpha - \beta_i$ также является собственным значением той же задачи и ему соответствует собственная функция $\bar{y}(x)$. Так как $\bar{\lambda} \neq \lambda$, то в силу свойства 2 функции y(x) и $\bar{y}(x)$ ортогональны на [a, b], то есть

$$\int_a^b y(x)\cdot\bar{y}(x)dx \equiv \int_a^b |y(x)|^2 dx = 0.$$

Отсюда следует, что y(x) ≡ 0 на [a, b]. Значит ни одно комплексное число λ не может быть собственным значением.

Свойство 5. Пусть коэффициенты уравнения (24) удовлетворяют условиям: p(x), q(x), r(x) - непрерывные функции и, кроме того, p(x) имеет непрерывную производную на [a, b], $p(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$, $r(x) > 0$. Тогда задача Штурма-Лиувилля $\{L_{\lambda}y = 0, \ \ell_1 y = 0, \ \ell_2 y = 0\}$ имеет бесконечное число собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Если краевые условия имеют вид (26) или (27), или (28), то собственные значения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots; \ \lambda_n \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема Стеклова. Всякая непрерывная функция f(x), удовлетворяющая однородным краевым условиям: $\ell_1 f = 0$ и $\ell_2 f = 0$, и имеющая непрерывные производные до второго порядка на отрезке [a, b], разлагается на этом отрезке в сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $y_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля $\{L_{\lambda}y = 0, \ \ell_1 y = 0, \ \ell_2 y = 0\}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x),$$

где коэффициенты Фурье C_n вычисляются по формулам:

$$C_n = \frac{1}{\|y_n(x)\|^2}\int_a^b r(x)f(x)y_n(x)dx.$$

§3. Решение задач Штурма-Лиувилля

Задачу Штурма-Лиувилля в общем виде мы, конечно, решить не сможем. Однако некоторые частные случаи удается разобрать до конца и получить формулы для собственных значений и собственных функций. Разберем эти случаи.

Вначале рассмотрим уравнение (25) $y'' + \lambda y' = 0$ и краевые условия первого рода (26) $y(a) = y(b) = 0$. Для удобства будем считать, что $a = 0$ и $b = \ell > 0$. К такой задаче можно всегда свести данную задачу, если сделать замену переменной $x' = x - a$, при этом вид уравнения не изменится.

Вид общего решения уравнения (25) зависит от значений параметра λ в уравнении (25). Разберем три случая: 1) $\lambda < 0$, 2) $\lambda = 0$, 3) $\lambda > 0$. В первом случае обозначим $\lambda = -k^2$. Тогда характеристическое уравнение $r^2 - k^2 = 0$ будет иметь действительные различные корни $r_1 = k$, $r_2 = -k$. Поэтому, общее решение дифференциального уравнения запишется в виде $y = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx}$. Подставим краевые условия в общее решение и получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{k\ell} + C_2 e^{-k\ell} = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{k\ell} & e^{-k\ell} \end{vmatrix} = e^{-k\ell} - e^{k\ell} = e^{k\ell}(e^{-2k\ell} - 1) \neq 0 \text{ при } k \neq 0.$$

Следовательно, система имеет только нулевое (тривиальное) решение $C_1 = C_2 = 0$. Значит, при $\lambda < 0$ данная задача не имеет собственных значений. Если $\lambda = 0$, то общее решение уравнения $y'' = 0$ записывается в виде $y = C_1x + C_2$. При подстановке краевых условий получим: $C_2 = 0$, $C_1\ell + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$. Поэтому, точка $\lambda = 0$ также не является собственным значением задачи. Наконец, в третьем случае обозначим $\lambda = k^2$ и получим характеристическое уравнение $r^2 + k^2 = 0$. Оно имеет комплексные корни $r_1 = ki$ и $r_2 = -ki$, и общее решение дифференциального уравнения в этом случае запишется в виде $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$. Подставим краевые условия в общее решение:

$$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 0 \\ C_1\cos k\ell + C_2\sin k\ell = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin k\ell = 0 \end{cases} \qquad (29)$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы $\sin k\ell = 0$. Следовательно $k\ell = \pi n$, то есть $k_n = \frac{\pi n}{\ell}$, $n \in Z$. Так как $\lambda_n = k_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$ и $\lambda_n \neq 0$, то можно ограничиться только положительными значениями $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, собственные значения данной задачи имеют вид $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$, $n = 1, 2, \ldots$ При этих значениях алгебраическая система (29) имеет решения: $C_1 = 0$, C_2 – любое действительное число. Подставим эти значения в общее решение дифференциального уравнения и получим собственные функции задачи $y_n = C_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x$, $n = 1, 2, \ldots$. Обычно постоянный множитель C_n

выбирают либо равным единице, либо из условия нормировки:

$$\|y_n\| = 1 \Rightarrow C_n \int_0^{2\ell} \sin^2 \frac{\pi n}{\ell} dx = 1 \Rightarrow C_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} .$$

По тому же алгоритму решаются задачи Штурма-Лиувилля следующего вида:

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y'(\ell) = 0, \qquad (30)$$

и

$$y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = y(\ell) = 0. \qquad (31)$$

Эти задачи так же, как и предыдущая, при $\lambda \le 0$ не имеют собственных значений. В случае $\lambda > 0$ общее решение уравнения записывается в виде $y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$, где $k = \sqrt{\lambda}$. После подстановки y в краевые условия, получим:
а) для задачи (30)

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -kC_1 \sin k\ell + kC_2 \cos k\ell = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ kC_2 \cos k\ell = 0 \end{cases}$$

б) для задачи (31)

$$\begin{cases} kC_2 = 0 \\ C_1 \cos k\ell + C_2 \sin k\ell = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \cos k\ell = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы эти системы уравнений имели нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы $\cos k\ell = 0$. Следовательно, $k\ell = \frac{\pi}{2} + \pi n$, то есть $k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\ell}$, $n \in Z$. Отрицательные значения n можно не рассматривать, так как $\lambda_n = k_n^2$. Таким образом, собственные значения у этих задач одинаковые $\lambda_n = k_n^2 = \frac{\pi^2}{4\ell^2}(2n+1)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Собственные функции задачи (30) имеют вид $y_n = \sin \frac{\pi}{2\ell}(2n+1)x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. А у задачи (31) они другие:

$$y_n = \cos \frac{\pi}{2\ell}(2n+1)x,\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (31')$$

Некоторые отличия возникают при решении задачи Штурма-Лиувилля в случае краевых условий второго рода:

$$y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = y'(\ell) = 0. \qquad (32)$$

Рассуждениями, аналогичными тем, которые проводились для краевых условий первого рода, можно показать, что задача (32) при $\lambda < 0$ не имеет собственных значений. А вот $\lambda = 0$ является собственным числом. В самом деле, при $\lambda = 0$ общее решение уравнения имеет вид $y = C_1x + C_2$. После подстановки y в краевые условия (32) получим: $C_1 = 0$, C_2 - любое действительное число. Следовательно, функция $y = 1$ является собственной функцией задачи. Другие собственные значения и собственные функции получаются при $\lambda > 0$. В этом случае, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$, $k = \sqrt{\lambda}$. Найдем производную этой функции и подставим в нее краевые условия (32):

$$y' = -kC_1\sin kx + kC_2\cos kx \Rightarrow \begin{cases} kC_2 = 0 \\ -kC_1\sin k\ell + kC_2\cos k\ell = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1\sin k\ell = 0 \end{cases}$$

Эта алгебраическая система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\sin k\ell = 0$, то есть $k\ell = \pi n$ или $k_n = \frac{\pi n}{\ell}$, $n \in Z$. Таким образом, числа $\lambda_n = k_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$ также являются собственными значениями задачи. Собственные функции при этих значениях имеют вид $y_n = \cos\frac{\pi n}{\ell}x$. Окончательно, задача (32) имеет собственные значения $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и собственные функции $y_n = \cos x\frac{\pi n}{\ell}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Для задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями третьего рода (28) уже не удается получить собственные значения в явном виде. В качестве примера рассмотрим одну такую задачу, когда $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$:

$$y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = y(0),\ y'(\ell) = 0. \qquad (33)$$

При $\lambda \le 0$ задача (33) не имеет собственных значений и собственных функций. Доказательство этого проводится так же, как и для краевых условий первого рода. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения записывается в виде $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$, где $k = \sqrt{\lambda}$. После дифференцирования этой функции и подстановки в производную и в функцию краевых условий (33) будем иметь:

$$\begin{cases} -C_1k\sin 0 + C_2k\cos 0 = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 \\ -C_1k\sin k\ell + C_2k\cos k\ell = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_2k = C_1 \\ -C_1k\sin k\ell + C_2k\cos k\ell = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_2k \\ C_2k(\cos k\ell - k\sin k\ell) = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Получившаяся алгебраическая система будет иметь нетривиальные решения только в том случае, когда

$$\cos k\ell - k\sin k\ell = 0$$

или

$$\operatorname{ctg} k\ell = k \quad (35)$$

Уравнение (35) является трансцендентным уравнением относительно k. Оно не решается в явном виде. Однако, построив графики левой и правой частей уравнения (35), видно, что оно имеет бесконечно много решений (см. рис. 5). Обозначим корни уравнения (35) через r_n, n = 1, 2, ... Тогда $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$, $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

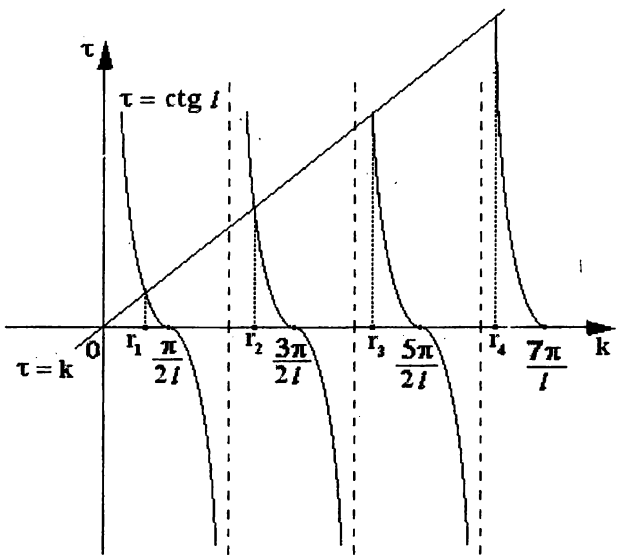

Рис. 5

Численными методами можно найти приближенные значения r_n . Из системы (34) при $k = r_n$ получим $C_{1n} = r_n C_{2n}$, где C_{2n} - произвольные постоянные. При этих значениях постоянных решения дифференциального уравнения будут иметь вид

$$y_n = C_{2n}(r_n\cos r_n x + \sin r_n x).$$

Они являются собственными функциями краевой задачи (33) с собственными значениями $\lambda_n = r_n^2$, n = 1, 2, ...

§4. Разложение функций в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

Во всех примерах, рассмотренных в предыдущем параграфе, собственные функции задач Штурма-Лиувилля были тригонометрическими. Однако, это вовсе не означает, что всегда собственные функции будут тригонометрическими. В этой связи разберем

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}[x\frac{dy}{dx}] + (\lambda x - \frac{\nu^2}{x})y = 0 \qquad (36)$$

В этом уравнении коэффициенты $p(x) \equiv x$, $q(x) \equiv \frac{\nu^2}{x}$ и $r(x) \equiv x$ отличаются от коэффициентов уравнения (24) тем, что при $x = 0$ $p(x)$ и $r(x)$ равны нулю, а $q(x) \to \infty$ при $x \to 0$. В этом случае говорят, что коэффициенты имеют особенность в точке $x = 0$. Обыкновенные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых имеют особенности, часто возникают при решении уравнений с частными производными. К уравнению (36) мы придем в §4, гл.IV, при решении задачи Дирихле методом разделения переменных.

Уравнение (36) называется уравнением Бесселя с параметрами λ и ν. С помощью замены независимой переменной $z = \sqrt{\lambda}\,x$ от параметра λ можно избавиться:

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\sqrt{\lambda} \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\frac{d}{dz}[z\frac{dy}{dz}] + \sqrt{\lambda}(z - \frac{\nu^2}{z})y = 0 \text{ или}$$

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0, \qquad (37)$$

правда при этом переменная z, вообще говоря, будет уже комплексной.

Уравнение Бесселя (37) хорошо изучено. Решения этого уравнения в общем случае уже не выражаются через элементарные функции, они называются функциями Бесселя или цилиндрическими функциями порядка ν (параметр ν также может принимать любые действительные или комплексные значения). Сейчас мы не будем подробно излагать свойства этих функций. Остановимся только на частном случае, который нам понадобится в дальнейшем. Пусть в уравнении (36) $\lambda > 0$ и $\nu = n$ – целое ≥ 0, $x \geq 0$. Тогда z будет действительной переменной и общее решение уравнения (37) можно записать в виде $y(x) = C_1J_n(z) + C_2Y_n(z)$, где $J_n(z)$ и $Y_n(z)$ - два линейно независимых частных решения. Функцию $J_\nu(z)$ называют функцией Бесселя порядка ν первого рода, $Y_\nu(z)$ - функцией Бесселя порядка ν второго рода (или функцией Неймана). В теории специальных функций доказано, что при $z \to 0$ функция $J_n(z)$ является ограниченной, а $Y_n(z)$ - неограниченной (стремится к бесконечности).

Функции Бесселя имеют бесконечно много нулей в интервале $(0, \infty)$. Они приводятся в таблицах, но их можно вычислить и на ЭВМ. Приближенные значения нескольких первых нулей функций $J_n(z)$ приведены ниже (см. таблицу 1).

Таблица 1

Корни уравнения $J_n(z) = 0$

i \ n	0	1	2	3	4
1	2,40	3,83	5,13	6,38	7,59
2	5,52	7,02	8,42	9,76	11,06
3	8,65	10,17	11,62	13,02	14,37
4	11,79	13,32	14,80	16,22	17,62
5	14,93	16,47	17,96	19,41	20,83
.	...	...	...	...	...
.	...	...	...	...	...
.	...	...	...	...	...

В специальной литературе в таблицах можно найти также и другие значения функций $J_0(z)$ и $J_1(z)$. Функции Бесселя порядка $n \geq 2$ вычисляются через эти две функции с помощью рекуррентных соотношений.

В связи с особенностью коэффициентов уравнения Бесселя при $x = 0$ краевые условия задачи формулируются по-новому: решение $y(x)$ при $x \to 0$ должно быть ограниченным. В другой точке $x = \ell$, $\ell > 0$, краевые условия имеют прежний вид (см. §1). Несмотря на эти различия, свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя сохраняются прежними. Рассмотрим, в частности, задачу Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0,\ x \in (0,\ \ell),\ \lambda > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (38)$$

$y(x)$ ограничена при $x \to 0$, $y(\ell) = 0$.

Как уже говорилось, уравнение (38) имеет ограниченные при $x \to 0$ решения $y_n(x) = CJ_n(\sqrt{\lambda}\,x)$ (функция $Y_n(\sqrt{\lambda}\,x)$ - неограниченная при $x \to 0$). При $x = \ell$ они должны удовлетворять условию: $y(\ell) \equiv CJ_n(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0$. Отсюда получается уравнение для собственных значений

$$J_n(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0.$$

Данное уравнение, как следует из свойств $J_n(z)$, имеет бесконечно много решений в интервале $(0, \infty)$. Обозначим их через $\chi_1^{(n)}$, $\chi_2^{(n)}$, ... , $\chi_i^{(n)}$, ... Значит собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (38) имеют вид $\lambda_{n,i} = (\chi_i^{(n)})^2$, $i = 1, 2, \ldots$, а собственные функции $y_{n,i} = J_n(\chi_i^{(n)}x)$.

Перечислим основные свойства собственных функций и собственных значений задачи (38):

1) две собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению $\lambda_{n,i}$, линейно зависимые;

2) две собственные функции $y_{n,i}$ и $y_{n,j}$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_{n,i}$ и $\lambda_{n,j}$ ($i \neq j$), ортогональны в интервале $(0, \ell)$ с весом $r(x) \equiv x$;

3) собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, образуют линейно независимую систему функций;

4) собственные значения задачи (38) действительные;

5) задача имеет бесконечное число собственных значений $\lambda_{n,i}$: $0 < \lambda_{n,1} < \lambda_{n,2} < \ldots \lambda_{n,i} < \ldots$; $\lambda_{n,i} \to \infty$ при $i \to \infty$;

6) справедлива теорема Стеклова.

Разложение функции f(x) в ряд Фурье по функциям Бесселя имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^{(n)} J_n\left(\chi_i^{(n)} x\right),$$

где

$$C_i^{(n)} = \frac{\ell}{\left\| J_n\left(\chi_i^{(n)} x\right) \right\|^2} \int_0^{\ell} x f(x) J_n\left(\chi_i^{(n)} x\right) dx, \quad n \geq 0 \qquad (39)$$

Вычисление норм функций Бесселя можно найти в книгах по специальным функциям.

ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе изучаются уравнения, которые наиболее часто встречаются в различных областях физики и техники и которые называются в связи с этим уравнениями математической физики.

§1. Основные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям с частными производными

Задача 1. Рассмотрим тонкую струну длины ℓ, туго натянутую и сделанную из однородного материала. Пусть в положении равновесия она занимает отрезок 0ℓ оси 0x. Если ее оттянуть в какой-либо точке и затем отпустить, либо резко ударить по ней (как, например, в клавишных музыкальных инструментах), то она будет колебаться. Предположим, что струна колеблется в одной плоскости (на рис. 6 в плоскости x0U). Причем каждая точка x перемещается перпендикулярно оси x (поперечные колебания). Силой тяжести, действующей на нее, пренебрежем.

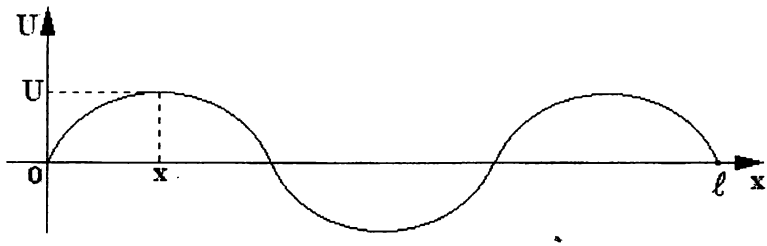

Рис. 6

Обозначим через U отклонение струны в точке x от положения равновесия. Это отклонение зависит также и от момента времени, в который мы наблюдаем его. Таким образом, отклонение U является функцией двух переменных: U = U(x, t). В следующем параграфе будет показано, что если рассматривать малые колебания, то математически этот процесс описывается однородным уравнением колебаний $U_{tt} = a^2 \cdot U_{xx}$. Это уравнение совпадает с волновым (одномерным) уравнением (8) (см. гл. I, §3). В более сложных случаях, когда на струну действуют внешние силы (например, периодические импульсы или гравитационная сила), получается неоднородное волновое уравнение $U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t)$. В этих уравнениях величина a является физической постоянной, а функция f(x, t) связана с внешними силами.

Задача 2. Рассмотрим мембрану, сделанную из однородного материала, туго натянутую и закрепленную по краям (например, кусок кожи, натянутый на барабан). Если ее каким-либо образом вывести из состояния покоя (например, в некоторый момент ударив по ней), то она начинает колебаться. Предположим, что в состоянии покоя мембрана занимает некоторую область $\mathcal{D}$ в плоскости XOУ (см. рис. 7), а при колебаниях все ее точки P(x, y) смещаются перпендикулярно этой плоскости (поперечные колебания). Предположим также, что на нее не действуют внешние силы, а силой тяжести пренебрежем. Обозначим через U отклонение точки P(x, y) мембраны от положения равновесия в момент времени t: U = U(x, y, t). Тогда уравнение малых колебаний

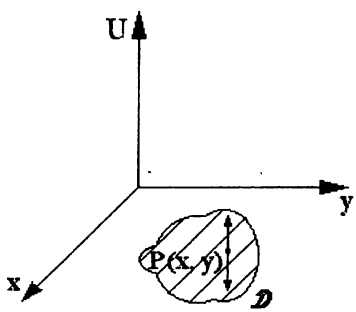

Рис. 7

мембраны имеет вид $U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy})$. Это уравнение совпадает с волновым уравнением в плоскости (9). Используя оператор Лапласа ΔU, его можно переписать в виде $U_{tt} = a^2 \Delta U$. Число a - физическая постоянная.

К волновому уравнению в пространстве (10) приводит задача о распространении звука.

Задача 3. Предположим, что в некоторой точке пространства имеется какой-либо источник (источник возмущения), который в некоторый момент времени (начальный момент) издает звук (начальное возмущение). Процесс распространения звука (начального возмущения) в пространстве описывается волновым уравнением $U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz})$, или $U_{tt} = a^2 \Delta U$.

Название этого уравнения произошло именно из того, что оно описывает распространение слабых возмущений в упругой среде (то есть механические колебания с малыми амплитудами), которые в физике называются волнами. Из физики также известно, что волны бывают сферическими, цилиндрическими и плоскими. Волновое уравнение (10) описывает сферические волны. Уравнения (9) и (8), также рассматриваемые в пространстве, описывают цилиндрические и плоские волны, соответственно.

Сформулируем теперь задачи, приводящие к уравнениям (11), (12), (13). Эти уравнения называются уравнениями теплопроводности и связаны с процессами распространения тепла.

Задача 4. Рассмотрим тонкий однородный металлический стержень длины ℓ. Предположим, что он в начальном состоянии неравномерно нагрет. Тогда благодаря теплопроводности в нем будет происходить передача тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Таким образом, температура U в стержне зависит от точки x и от времени t , то есть U = U(x, t) - функция двух переменных. В простейшем случае, когда боковая поверхность и концы стержня теплоизолированы, то есть не происходит теплообмена с окружающей средой, и никакого (дополнительного) притока тепла внутри нет, температура точек стержня с течением времени будет выравниваться и в конечном итоге станет постоянной во всем стержне. В более сложных случаях, когда возможен теплообмен с окружающей средой или на некоторых участках стержня выделяется (или поглощается) тепло, распределение температуры будет соответственно усложняться. В условиях, когда боковая поверхность теплоизолирована и отсутствуют внутренние источники тепла, температура U(x, t) удовлетворяет однородному уравнению $U_t = a^2 U_{xx}$. Если имеются тепловые источники, то уравнение теплопроводности будет неоднородным: $U_t = a^2 U_{xx} + f(x, t)$. В случае теплообмена с окружающей средой через боковую поверхность получается еще более сложное уравнение: $U_t = a^2 U_{xx} + h^2 (\tilde{U} - U) + f(x, t)$, в котором через $\tilde{U} = \tilde{U}(x, t)$ обозначена температура окружающей среды. Постоянные a и h зависят от материала стержня, a называется коэффициентом температуропроводности, h - коэффициентом теплообмена.

К уравнению теплопроводности в пространстве приводит следующая

Задача 5. Рассмотрим неравномерно нагретое однородное тело. Благодаря теплопроводности в нем, так же как и в стержне, будет происходить передача тепла от более нагретых частей к менее нагретым, в результате чего температура в каждой точке тела будет меняться с течением времени: $U = U(x, y, z, t)$ - функция четырех переменных. В случае отсутствия внутренних источников тепла распределение температуры в теле удовлетворяет уравнению $U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz})$. Если внутри тела в каких-либо частях может выделяться (или поглощаться) тепло, то получается неоднородное уравнение $U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) + f(x, y, z, t)$. С помощью оператора Лапласа ΔU оно запишется проще: $U_{tt} = a^2\Delta U + f(x, y, z, t)$. Ясно, что уравнение теплопроводности в плоскости и одномерное уравнение являются частными случаями уравнения в пространстве.

До сих пор мы рассматривали процессы, которые развивались в пространстве и во времени. Существует, однако, много явлений, которые не изменяются с течением времени. Такие явления называются стационарными. Часто с течением времени многие процессы становятся стационарными. Например, распределение температуры в теле спустя длительное время может уже не зависеть от времени. Это означает, что $U_t \equiv 0$ и тогда уравнение, которому удовлетворяет стационарное распределение температуры, будет иметь вид $\Delta U = 0$. Это - уравнение Лапласа. Если в теле имеются источники тепла, которые также не зависят от времени, то стационарный процесс будет описываться неоднородным уравнением $\Delta U = - f(x, y, z)$. Это уравнение называется уравнением Пуассона.

Замечание. На самом деле применения уравнений Лапласа и Пуассона выходят далеко за рамки задачи о стационарном распределении температуры. Многие задачи в физике (в частности в электростатике, гидродинамике) и в технике (например, электрические методы разведки полезных ископаемых) приводят к этим уравнениям. Однако при изучении указанных уравнений удобно представлять себе функцию U как температуру. Точно так же, уравнение теплопроводности описывает не только процесс распространения тепла, но и различные диффузионные процессы (например, диффузию дыма из дымовой трубы). Волновые уравнения возникают в задачах об электрических колебаниях, в гидродинамике и акустике, в теории упругости, при изучении электромагнитных полей. Мы не ставим цель рассмотреть все области применения уравнений математической физики. По этой же причине вывод уравнений будет проведен в самых простых модельных случаях.

§2. Вывод уравнения колебаний струны

Для построения математической модели колебаний струны рассмотрим все силы, действующие на небольшой участок струны (см. рис. 8). Оказывается, что волновое уравнение вытекает из второго закона Ньютона, примененного к струне. Глядя на рис. 8, мы можем представить те силы, которые действуют на струну в направлении, перпендикулярном оси OX.

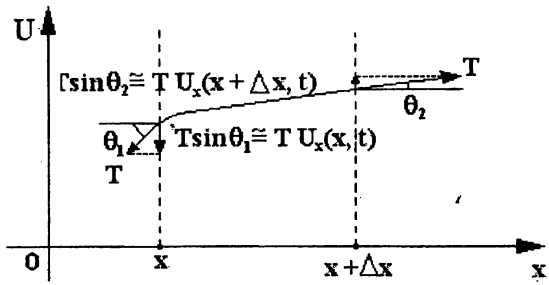

Рис. 8

$$\text{Сила} = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 \cong T[U_x(x + \Delta x, t) - U_x(x, t)],$$

где T - сила, обусловленная натяжением струны. При выводе этой формулы учитываем, что рассматриваются малые колебания и поэтому $\sin\theta_1 \cong \operatorname{tg}\theta_1 = U_x(x, t)$, $\sin\theta_2 \cong \operatorname{tg}\theta_2 = U_x(x + \Delta x, t)$. Так как, по предположению, внешние силы отсутствуют и силой тяжести мы пренебрегаем, то других сил, действующих на струну, нет. По второму закону Ньютона mw = F (произведение массы на ускорение равно силе). То есть $\rho\Delta\ell\ U_{tt} = T[U_x(x + \Delta x, t) - U_x(x, t)]$, где ρ - плотность (линейная) материала, из которого изготовлена струна, $\Delta\ell$ - длина участка струны. Разделим обе части равенства на Δx и устремим Δx к нулю:

$$\frac{\rho\Delta\ell \cdot U_{tt}}{\Delta x} = \frac{T[U_x(x+\Delta x, t) - U_x(x, t)]}{\Delta x} \quad \Rightarrow \rho\, U_{tt} = T\, U_{xx},$$

так как

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta x} \to 1, \frac{U_x(x+\Delta x, t) - U_x(x, t)}{\Delta x} \to U_{xx},$$

или

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \text{ где } a^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Полученное уравнение называется **уравнением свободных колебаний струны**, так как оно описывает колебания струны, на которую не действуют внешние силы. Нетрудно получить также волновое уравнение с учетом внешних сил, действующих на струну. Предположим, что внешние силы непрерывно распределены по струне с плотностью F(x, t). Тогда получится неоднородное волновое уравнение

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), \text{ где } f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}.$$

Это уравнение называется **уравнением вынужденных колебаний струны**, происходящих под действием внешних сил.

§3. Вывод уравнения теплопроводности

При построении математической модели распространения тепла в стержне сделаем следующие предположения:

1) стержень сделан из однородного проводящего материала с плотностью ρ ;

2) боковая поверхность стержня теплоизолирована, то есть тепло может распространяться только вдоль оси OX;

3) стержень тонкий - это значит, что температура во всех точках любого поперечного сечения стержня одна и та же.

Рассмотрим часть стержня на отрезке $[x, x + \Delta x]$ (см. рис. 9) и воспользуемся **законом сохранения количества тепла**:

Общее количество тепла на отрезке $[x, x + \Delta x]$ = *Полному количеству тепла, прошедшему через границы, + Полное количество тепла, образованного внутренними источниками.*

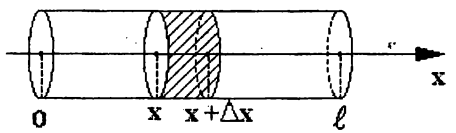

Рис. 9

Общее количество тепла, которое необходимо сообщить участку стержня, чтобы повысить его температуру на ΔU, вычисляется по формуле: $\Delta Q = C\rho S\Delta x\Delta U$, где C - удельная теплоемкость материала (= количеству тепла, которое нужно сообщить 1 кг вещества, чтобы поднять его температуру на 1°), S - площадь поперечного сечения.

Количество тепла, прошедшее через левый конец участка стержня за время Δt (тепловой поток) вычисляется по формуле: $Q_1 = -kSU_x(x, t)\Delta t$, где k - коэффициент теплопроводности материала (= количеству тепла, протекающего в секунду через стержень единичной длины и единичной площади поперечного сечения при разности температур на противоположных концах, равной 1°). В этой формуле особого пояснения требует знак минус. Дело в том, что поток считается положительным, если он направлен в сторону увеличения x, а это, в свою очередь, означает, что слева от точки x температура больше, чем справа, то есть $U_x < 0$. Следовательно, чтобы Q_1 был положительным, в формуле стоит знак минус. Аналогично, тепловой поток через правый конец участка стержня вычисляется по формуле: $Q_2 = -kSU_x(x + \Delta x, t)\Delta t$. Если предположить, что внутренних источников тепла в стержне нет, и воспользоваться законом сохранения тепла, то получим:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 \Rightarrow C\rho S\Delta x\Delta U = kSU_x(x + \Delta x, t)\,\Delta t - kSU_x(x, t)\Delta t.$$

Если это равенство поделить на $S\Delta x\Delta t$ и устремить Δx и Δt к нулю, то будем иметь

$$\frac{C\rho S\Delta x\Delta U}{S\Delta x\Delta t} = \frac{kS[U_x(x+\Delta x,t)-U(x,t)]\Delta t}{S\Delta x\Delta t} \Rightarrow C\rho U_t = kU_{xx},$$

так как $\frac{\Delta U}{\Delta t} \to U_t$, $\frac{U_x(x+\Delta x,t)-U_x(x,t)}{\Delta x} \to U_{xx}$.

Отсюда уравнение теплопроводности имеет вид $U_t = a^2U_{xx}$,

где $a = \sqrt{\frac{k}{C\rho}}$ - коэффициент температуропроводности.

В случае, когда внутри стержня имеются источники тепла, непрерывно распределенные с плотностью q(x,t), получится неоднородное уравнение теплопроводности

$$U_t = a^2U_{xx} + f(x, t), \text{ где } f(x, t) = \frac{1}{C\rho S} q(x, t).$$

§4. Начальные условия

Дифференциальные уравнения с частными производными так же, как и обыкновенные уравнения, вообще говоря, имеют бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выбрать то единственное решение, которое соответствует реальному физическому процессу (например, колебанию данной струны или распределению температуры в данном стержне), надо задать некоторые дополнительные условия. В теории обыкновенных уравнений они назывались начальными условиями. В итоге получалась задача Коши, для которой справедливы теоремы о существовании и единственности решения. В уравнениях с частными производными также задаются начальные условия и возникает задача Коши. В уравнениях математической физики они соответствуют состоянию физического процесса в начальный момент времени, который обычно принимают за $t_0 = 0$. Однако здесь есть некоторые отличия. Во-первых, начальные условия задаются для *нестационарных уравнений*, то есть таких уравнений, которые описывают нестационарные (зависящие от времени) процессы. Это - волновые уравнения и уравнения теплопроводности. Во-вторых, задача Коши для уравнений с частными производными имеет единственное решение только в том случае, когда соответствующее уравнение рассматривается или на всей прямой, или на всей плоскости, или во всем пространстве. Например, это может быть задача о колебании бесконечной струны или о распространении тепла в бесконечном стержне. На практике к таким задачам приходят в том случае, когда имеется очень длинная струна или очень длинный стержень и интересуются процессами, происходящими далеко от концов, а влиянием концов пренебрегают. Если взять, допустим, длинный провод и слегка качнуть его в середине, то по нему влево и вправо побегут волны. Картина начнет искажаться только тогда, когда волны дойдут до концов провода и, отразившись, пойдут обратно. Следовательно, не учитывая влияния концов,

мы тем самым не будем учитывать влияния отраженных волн.

Для волнового уравнения $U_{tt} = a^2U_{xx}$ задаются *два начальных условия*

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad U_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{40}$$

Иногда их записывают иначе: $U(x, 0) = \varphi(x)$, $U_t(x, 0) = \psi(x)$. Первое условие в (40) физически задает начальную форму струны (начальные отклонения точек струны), а второе условие - начальные скорости точек струны. В случае волнового уравнения $U_{tt} = a^2\Delta U$ на плоскости или в пространстве задаются те же два начальных условия, только функции φ и ψ, соответственно, будут зависеть от двух или трех переменных.

Для уравнения теплопроводности $U_t = a^2U_{xx}$ задается только *одно начальное условие* $U|_{t=0} = \varphi(x)$ (или в другой записи $U(x, 0) = \varphi(x)$) и физически оно означает, что начальное распределение температуры стержня имеет вид $\varphi(x)$. Для уравнений теплопроводности на плоскости или в пространстве начальное условие имеет такой же вид, только функция φ будет зависеть, соответственно, от двух или трех переменных.

§5. Граничные условия

Если размеры струны или стержня не очень велики и влиянием концов нельзя пренебречь, то в этих случаях одни начальные условия уже не обеспечивают единственность решения задачи. Тогда необходимо задавать условия на концах. Они называются **граничными условиями**. Для уравнения колебаний струны часто задаются условия $U|_{x=0} = 0$, $U|_{x=\ell} = 0$. Иначе их записывают еще и так: $U(0,t) = 0$, $U(\ell,t) = 0$. Эти условия физически означают, что концы струны закреплены (то есть отклонения при $x = 0$ и $x = \ell$ в любой момент времени равны нулю). Можно задавать и другие условия на концах струны, например, $U_x|_{x=0} = 0$, $U_x|_{x=\ell} = 0$. Такие условия возникают в следующей задаче: концы струны перемещаются вдоль вертикальных направляющих без трения (см. рис. 10). Так как вертикальные силы, действующие на левый и правый концы струны, определяются выражениями $TU_x(0,t)$ и $TU_x(\ell,t)$ (см. §2), то записанные выше условия означают, что на концы струны не действуют

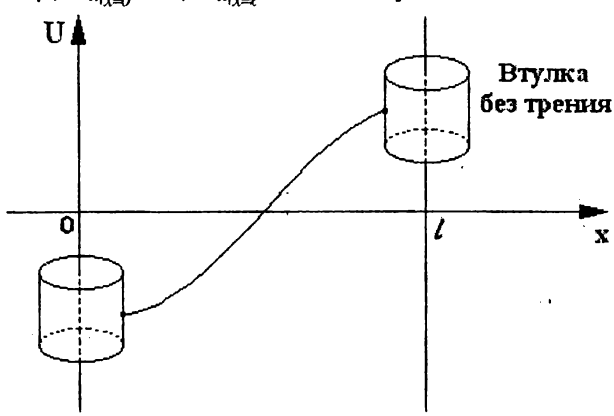

Рис. 10

никакие силы (поэтому такие условия называют еще условиями свободных концов).

Как было уже сказано, волновое уравнение $U_{tt} = a^2U_{xx}$ описывает не только колебания струны, но и другие волновые процессы, к примеру, продольные колебания пружины, продольные колебания стержня, крутильные колебания вала. В этих задачах возникают граничные условия и других видов. Подробно такие задачи мы изучать не будем. Однако приведем основные типы граничных условий. Обычно рассматривают три типа (сравните с (26), (27) и (28)):

I. Граничные условия первого рода

$$U\big|_{x=0} = g_1(t), \quad U_x\big|_{x=\ell} = g_2(t) \tag{41}$$

Эти условия физически означают, что на концах заданы режимы колебаний.

II. Граничные условия второго рода

$$U_x\big|_{x=0} = g_1(t), \quad U_x\big|_{x=\ell} = g_2(t) \tag{42}$$

Такие условия соответствуют тому, что на концах заданы силы.

III. Граничные условия третьего рода

$$\left(U_x - \sigma_1 U\right)\big|_{x=0} = g_1(t), = \left(U_x - \sigma_2 U\right)\big|_{x=\ell} g_2(t) \tag{43}$$

Эти условия соответствуют упругому закреплению концов.

Граничные условия (41), (42) и (43) называются однородными, если правые части $g_1(t)$ и $g_2(t)$ тождественно равны нулю при всех значениях t. Если хотя бы одна из функций в правых частях не равна нулю, то граничные условия называются неоднородными.

Для уравнения теплопроводности граничные условия имеют такой же вид, как и для волнового уравнения, но физический смысл их уже иной. Условия первого рода (41) означают, что на концах стержня задана температура. Если она не изменяется со временем, то $g_1(t) \equiv T_1$ и $g_2(t) \equiv T_2$, где T_1 и T_2 - постоянные. Если концы поддерживаются все время при нулевой температуре, то $T_1 = T_2 = 0$ и условия будут однородными. Граничные условия второго рода (42) определяют тепловой поток на концах стержня (см. §3). В частности, если $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$, то условия становятся однородными. Физически они означают, что через концы не происходит теплообмен с внешней средой (эти условия еще называют условиями теплоизоляции концов). Наконец, граничные условия третьего рода (43) соответствуют случаю, когда через концы стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона (напомним, что при выводе уравнения теплопроводности, мы считали боковую поверхность теплоизолированной). Правда, в случае уравнения теплопроводности условия (43) записываются немного по-другому:

$$U_x\big|_{x=0} = \lambda_1\left(U\big|_{x=0} - g_1(t)\right), \tag{44}$$

$$U_x\big|_{x=\ell} = -\lambda_2\left(U\big|_{x=\ell} - g_2(t)\right).$$

Физический закон теплообмена со средой (закон Ньютона) состоит в том, что поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды. Таким образом, для левого конца стержня он равен $-h_1(U|_{x=0} - g_1(t))S\Delta t$. Здесь $h_1 > 0$ - коэффициент теплообмена с окружающей средой, $g_1(t)$ - температура окружающей среды на левом конце. Знак минус поставлен в формуле по той же причине, что и в §3 при выводе уравнения теплопроводности. С другой стороны, в силу теплопроводности материала поток тепла через этот же конец равен $-kS\,U_x|_{x=0}\Delta t$ (см. §3). Применив закон сохранения количества тепла, получим:

$$-kS\,U_x|_{x=0}\,\Delta t = -h_1(U|_{x=0} - g_1(t))S\Delta t \Rightarrow U_x|_{x=0} = \lambda_1(U|_{x=0} - g_1(t)), \text{ где } \lambda_1 = \frac{h_1}{k} > 0.$$

Аналогично получается условие (44) на правом конце стержня, только постоянная λ_2 может быть другой, так как, вообще говоря, среды, окружающие левый и правый конец, бывают разные.

Граничные условия (44) являются более общими по сравнению с условиями первого и второго рода. Если предположить, что через какой-либо конец не происходит теплообмена со средой (то есть коэффициент теплообмена равен нулю), то получится условие второго рода. В другом случае предположим, что коэффициент теплообмена, например h_1, очень большой.

Перепишем условие (44) при $x = 0$ в виде $U|_{x=0} - g_1(t) = -\frac{1}{\lambda_1}U_x|_{x=0} = \frac{k}{h_1}U_x|_{x=0}$ и устремим $h_1 \to \infty$. В результате будем иметь условие первого рода: $U|_{x=0} = g_1(t)$.

Аналогично формулируются граничные условия и в случаях трех или четырех переменных при условии, что одна из этих переменных - время. Тогда границей в этих случаях будет или замкнутая кривая Г, ограничивающая некоторую плоскую область, или замкнутая поверхность Ω, ограничивающая область в пространстве. Соответственно изменится и производная от функции, фигурирующая в граничных условиях второго и третьего рода. Это будет производная по нормали n к кривой Г на плоскости или к поверхности Ω в пространстве, причем, как правило, рассматривают нормаль, внешнюю по отношению к области (см. рис. 11).

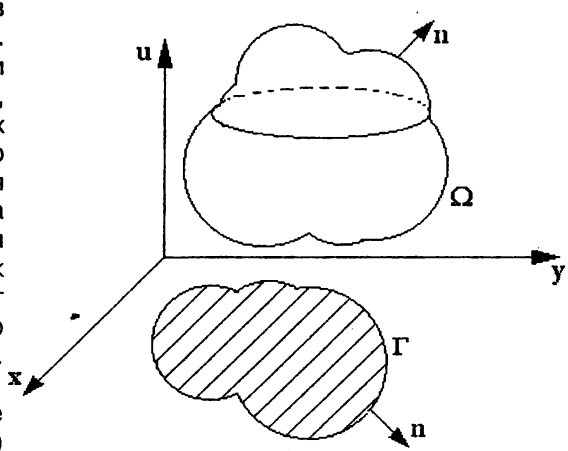

Рис. 11

К примеру, граничное условие (однородное) первого рода на плоскости

записывается в виде $U|_\Gamma = 0$, в пространстве $U|_\Omega = 0$. Граничное условие второго рода на плоскости имеет вид $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$, а в пространстве $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Omega = 0$. Конечно, физический смысл этих условий разный для различных задач. Условие $U|_\Gamma = 0$ для задачи о колебании мембраны означает, что ее края закреплены. Для задачи о распространении тепла в плоской пластине то же условие означает, что температура на ее краях поддерживается нулевой. Точно так же, условия $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$ и $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Omega = 0$ внешне очень похожи, но в первом случае для задачи о распространении тепла оно означает, что рассматривается плоская пластина и края ее теплоизолированы, а во втором случае оно означает, что рассматривается задача о распространении тепла в теле и поверхность его теплоизолирована.

§6. Краевые задачи для нестационарных уравнений

Совокупность граничных и начальных условий назовем здесь **краевыми условиями**. Дифференциальное уравнение вместе с краевыми условиями образуют краевую задачу. **Решить краевую задачу** - значит найти решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее краевым условиям, входящим в задачу. Заметим, что вовсе не обязательно, чтобы в краевые условия входили вместе и граничные, и начальные условия. Если краевые условия состоят только из начальных условий, то такая задача называется задачей Коши (сравните с обыкновенными уравнениями). Таким образом, **задача Коши для волнового уравнения** заключается в отыскании решения, удовлетворяющего двум начальным условиям. Она имеет вид:

a) для одномерного волнового уравнения

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},\ U|_{t=0} = \varphi(x),\ U_t|_{t=0} = \Psi(x);$$

b) для волнового уравнения на плоскости

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}),\ U|_{t=0} = \varphi(x, y),\ U_t|_{t=0} = \Psi(x, y);$$

c) для волнового уравнения в пространстве

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}),\ U|_{t=0} = \varphi(x, y, z),\ U_t|_{t=0} = \Psi(x, y, z).$$

Задача Коши для уравнения теплопроводности заключается в отыскании решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего одному начальному условию. Она имеет вид:

a) в одномерном случае

$$U_t = a^2 U_{xx},\ U|_{t=0} = \varphi(x);$$

b) на плоскости

$$U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}),\ U|_{t=0} = \varphi(x, y);$$

c) в пространстве

$$U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}),\ U|_{t=0} = \varphi(x, y, z).$$

Краевые задачи, в которых участвуют только граничные условия, рассматриваются для стационарных уравнений. Такие задачи будут сформулированы в следующем параграфе. А сейчас предположим, что в краевые условия входят как начальные, так и граничные условия. В этом случае они называются смешанными или начально-краевыми задачами. Эти задачи различаются также и по типу граничных условий. Например, первая краевая задача для уравнения теплопроводности содержит начальное условие и граничные условия первого рода. Первая краевая задача для волнового уравнения содержит два начальных условия и граничные условия первого рода. В соответствии с этим **первая краевая задача для уравнения теплопроводности** имеет вид:

a) для одномерного уравнения

$$U_t = a^2 U_{xx},\ U|_{t=0} = \varphi(x),\ U|_{x=0} = g_1(t),\ U|_{x=l} = g_2(t);$$

b) для уравнения на плоскости

$$U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}),\ U|_{t=0} = \varphi(x, y),\ U|_{\Gamma} = g(S, t),\ S \in \Gamma;$$

c) для уравнения в пространстве

$$U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}),\ U|_{t=0} = \varphi(x, y, z),\ U|_{\Omega} = g(S, t),\ S \in \Omega;$$

Первая краевая задача для волнового уравнения имеет вид:

a) в одномерном случае

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},\ U|_{t=0} = \varphi(x),\ U_t|_{t=0} = \Psi(x),\ U|_{x=0} = g_1(t),\ U|_{x=\ell} = g_2(t);$$

b) на плоскости

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}),\ U|_{t=0} = \varphi(x, y),\ U_t|_{t=0} = \Psi(x, y),\ U|_{\Gamma} = g(S, t),\ S \in \Gamma;$$

c) в пространстве

$$U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}),\ U|_{t=0} = \varphi(x, y, z),\ U_t|_{t=0} = \Psi(x, y, z),\ U|_{\Omega} = g(S, t),\ S \in \Omega.$$

Аналогично определяются вторая и третья краевые задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Они содержат в краевых условиях граничные условия второго и третьего рода, соответственно. Например, если граница однородного шара радиуса R омывается движущейся жидкостью, температура которой g(t), и на границе шара происходит теплообмен по закону Ньютона, то краевая задача будет иметь вид:

$$U_t = a^2 \Delta U,\ U|_{t=0} = \Phi(r, \varphi, \theta),\ U_r|_{r=R} = -\frac{h}{k}(U(R, \varphi, \theta) - g(t)).$$

Здесь U_r - производная по внешней нормали, которая в данном случае совпадает с направлением r. Предлагаем в качестве упражнения записать вид этих задач для произвольной области на плоскости или в пространстве.

Краевая задача называется однородной, если уравнение и граничные условия, входящие в задачу, однородные (заметьте, что начальные условия могут быть ненулевыми). В противном случае краевая задача называется неоднородной.

§7. Краевые задачи для стационарных уравнений

Уравнение Лапласа $\Delta U = 0$, как уже отмечалось в §1, можно рассматривать как уравнение, описывающее распределение температуры, которое с течением времени (то есть при $t \to \infty$) становится стационарным. В этом случае на решения U уравнения Лапласа начальные значения уже не оказывают никакого влияния и поэтому в краевых условиях участвуют только граничные значения. Это означает, что для уравнения Лапласа можно изучать три краевые задачи:

1) **задача Дирихле** (первая краевая задача)

$$\Delta U = 0, \quad U|_\Gamma = g(S), \; S \in \Gamma, \tag{45}$$

граничное условие в этом случае называют **условием Дирихле**;

2) **задача Неймана** (вторая краевая задача)

$$\Delta U = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Gamma = g(S), \; S \in \Gamma, \tag{46}$$

граничное условие в этом случае называют **условием Неймана**;

3) третья краевая задача

$$\Delta U = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Gamma + h(U|_\Gamma - g(S)) = 0, \; S \in \Gamma. \tag{47}$$

В этих задачах оператор Лапласа Δ можно рассматривать как в плоской области, ограниченной замкнутой кривой Г, так и в области, расположенной в пространстве и ограниченной замкнутой поверхностью Г. Здесь, чтобы не вводить новых обозначений, мы обозначили поверхность той же буквой, что и кривую. Это, однако, не должно привести к путанице. Через n обозначена внешняя нормаль, через $\frac{\partial U}{\partial n}$ - производная по нормали. В качестве примера рассмотрим уравнение Лапласа внутри круга радиуса R, записанное в полярных координатах,

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} = 0, \; 0 \le r < R,$$

с заданным условием Дирихле на границе

$$U(R, \varphi) = \sin\varphi, \; 0 \le \varphi < 2\pi,$$

или с условием Неймана

$$U_r(R, \varphi) = \sin\varphi, \; 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Если функцию U в этих задачах интерпретировать как стационарное распределение температуры в тонком однородном диске, то поставленное условие Дирихле означает, что при $0 < \varphi < \pi$ на границе

поддерживается положительная температура, а при $\pi < \varphi < 2\pi$ отрицательная , так как $\sin\varphi > 0$ при $0 < \varphi < \pi$ и $\sin\varphi < 0$ при $\pi < \varphi < 2\pi$. Условие Неймана означает, что при $0 < \varphi < \pi$ тепловой поток на границе направлен внутрь диска, а для $\pi < \varphi < 2\pi$ наружу.

Для уравнения Пуассона изучаются такие же краевые задачи, поэтому их формулировку, мы приводить не будем.

Задачи, сформулированные в (45), (46) и (47), рассматриваются в ограниченной области плоскости или пространства. Такие задачи называются внутренними. Кроме этих задач для стационарных уравнений рассматриваются и внешние краевые задачи, то есть задачи в неограниченных областях, которые являются внешностью некоторых ограниченных областей. В этих задачах дополнительно к прежним граничным условиям еще налагают условия на бесконечности. Причем эти условия различные в случае плоскости и пространства. Например, **внешняя задача Дирихле на плоскости** записывается в виде

$\Delta U = 0$, $U|_\Gamma = g(S)$, $S \in \Gamma$, $U(x, y)$ - ограничена в бесконечности, то есть существует такое число N, что $|U(x, y)| < N$.

Внешняя задача Дирихле в пространстве имеет вид $\Delta U = 0$, $U|_\Gamma = g(S)$, $S \in \Gamma$, $U(x, y, z)$ равномерно стремится к нулю при $(x, y, z) \to \infty$. (Напомним: равномерное стремление к нулю означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R(\varepsilon) > 0$, что вне шара радиуса $R(\varepsilon)$ с центром в точке 0 выполняется неравенство $|U| < \varepsilon$.

Для внешней задачи Неймана условия на бесконечности формулируются уже по-другому: функция должна быть регулярной на бесконечности, то есть $U(x, y, z)$ должна стремиться к нулю так, что

$$|U| < \frac{A}{r}, \quad |U_x| < \frac{A}{r^2}, \quad |U_y| < \frac{A}{r^2}, \quad |U_z| < \frac{A}{r^2} \quad \text{при } r < R.$$

ГЛАВА IV. МЕТОД ФУРЬЕ

Метод Фурье - один из распространенных и эффективных методов решения краевых задач для уравнений с частными производными. Он применяется к линейным однородным краевым задачам. Этот метод часто встречается и под другими названиями - метод разделения переменных или метод собственных функций.

§1. Общая схема метода Фурье

Основная идея этого метода состоит в том, что решение конкретной краевой задачи для уравнения с частными производными сводится к решению вспомогательных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений или для уравнений с частными производными, но с меньшим числом независимых переменных. Например, если уравнение содержит две независимые переменные x

и t, то решения U(x, t) этого уравнения ищут в виде произведений U(x, t) = X(x)T(t) так, что функции X(x) и T(t) уже оказываются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате получаются частные решения данного уравнения. Затем из этих решений в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами составляют решение первоначальной краевой задачи.

Изучим подробнее несколько простейших краевых задач, решения которых могут быть получены этим методом.

§2. Решение задачи для уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородную первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:
найти решение уравнения

$$U_t = U_{xx},\ 0 < x < 1,\ 0 < t < \infty, \tag{48}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$U(0, t) = U(1, t) = 0,\ 0 < t < \infty, \tag{49}$$

и начальному условию

$$U(x, 0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1. \tag{50}$$

Применим к этой задаче метод Фурье.
ШАГ 1. Будем искать решение уравнения (48) в виде U(x, t) = X(x)T(t). Найдем частные производные:

$$U_x(x, t) = X'(x)T(t),\ U_t(x, t) = X(x)T'(t),$$
$$U_{xx}(x, t) = X''(x)T(t),$$

Подставим эти производные в уравнение и разделим переменные:

$$XT' = X''T \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$

В полученном уравнении левая часть зависит только от t, а правая - только от x. Так как x и t не зависят один от другого, то каждая часть этого уравнения должна быть постоянной. Обозначим ее через $(-\lambda)$. Тогда

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

или

a) $T' + \lambda T = 0$,
b) $X'' + \lambda X = 0$.

Теперь можно решить каждое из этих обыкновенных дифференциальных уравнений. Обратим внимание на то, что используя граничные условия (49), можно искать не общее решение уравнения b), а частные решения, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям:

$$U(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

$$U(1, t) = 0 \Rightarrow X(1)T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0.$$

ШАГ 2. Решим задачу Штурма-Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = X(1) = 0.$$

Эта задача совпадает с задачей Штурма-Лиувилля (25), (26) при a = 0 и b = 1. Ее решение было дано в §3, гл. II. Напомним, что собственные значения и собственные функции этой задачи существуют только при $\lambda > 0$. Собственные значения равны $\lambda_n = \pi^2 n^2$, n = 1, 2, ... Собственные функции равны $X_n = \sin\pi nx$.

ШАГ 3. Подставим найденные значения $\lambda_n = \pi^2 n^2$ в уравнение а) и решим его:

$$T' + \lambda T = 0 \Rightarrow T_n' + \pi^2 n^2 T_n = 0 \Rightarrow r_n + \pi^2 n^2 = 0 \Rightarrow r_n = -\pi^2 n^2 \Rightarrow T_n = A_n e^{-\pi^2 n^2 t}$$

ШАГ 4. Выпишем частные решения уравнения (48):

$$U_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \sin\pi nx\, e^{-\pi^2 n^2 t}.$$

В силу линейности и однородности уравнения (48) (см. §3, гл. I) их линейная комбинация

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\pi nx\, e^{-\pi^2 n^2 t} \qquad (51)$$

также будет решением этого уравнения, причем функция U(x,t) удовлетворяет и граничным условиям (49).

ШАГ 5. Определим коэффициенты A_n в (51), используя начальное условие (50):

$$U(x, 0) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\pi nx = \varphi(x) \qquad (52)$$

Приходим к тому, что начальная функция φ(x) разлагается в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. По теореме Стеклова (см.§2, гл. II) такое разложение возможно для функций, удовлетворяющих граничным условиям и имеющих непрерывные производные второго порядка. Коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$A_n = \frac{1}{\|\sin\pi nx\|^2} \int_0^1 \varphi(x) \sin\pi nx\, dx;$$

$$\|\sin\pi nx\|^2 = \frac{1}{2}.$$

Вычислив эти коэффициенты для конкретной начальной функции φ(x) и подставив их значения в (51), мы тем самым получим решение задачи (48), (49), (50).

§3. Решение задачи для волнового уравнения

В этом параграфе методом Фурье решим первую краевую задачу для волнового уравнения:

$$U_{tt}(x, t) = U_{xx},\ 0 < x < 1,\ 0 < t < \infty, \tag{53}$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0,\ 0 < t < \infty, \tag{54}$$

$$U(x, 0) = \varphi(x),\ U_t(x, 0) = \Psi(x),\ 0 \le x \le 1 \tag{55}$$

ШАГ 1. Будем искать решение уравнения (53) в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$. Найдем частные производные:

$$U_x(x, t) = X'(x)T(t),\ U_t(x, t) = X(x)T'(t),$$

$$U_{xx}(x, t) = X''(x)T(t),\ U_{tt}(x, t) = X(x)T''(t).$$

Подставим эти производные в уравнение и разделим переменные:

$$XT'' = X''T \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

В полученном уравнении левая часть зависит только от t, а правая - только от x. Так как x и t не зависят один от другого, то равенство возможно только в том случае, если каждая часть этого уравнения постоянная. Обозначим ее через $(-\lambda)$.
Тогда

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

или

a) $T'' + \lambda T = 0$,
b) $X'' + \lambda X = 0$.

Из граничных условий (54) получим

$$U(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

$$U(1, t) = 0 \Rightarrow X(1)T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$$

ШАГ 2. Решим задачу Штурма-Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = X(1) = 0.$$

Эта задача совпадает с задачей (25), (26) при a = 0, b = 1. Собственные значения равны $\lambda_n = \pi^2 n^2$, n = 1, 2; ... . Собственные функции имеют вид $X_n(x) = \sin\pi nx$.
ШАГ 3. Подставим найденные значения $\lambda_n = \pi^2 n^2$ в уравнение а) и решим его:

$$T'' + \lambda T = 0 \Rightarrow T_n'' + \pi^2 n^2 T_n = 0 \Rightarrow r_n^2 + \pi^2 n^2 = 0 \Rightarrow r_{n1} = \pi ni,\ r_{n2} = -\pi ni \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T_{n1} = \cos\pi nt,\ T_{n2} = \sin\pi nt \Rightarrow T_n = A_n\cos\pi nt + B_n\sin\pi nt.$$

ШАГ 4. Выпишем частные решения уравнения (53):

$$U_n(x, t) = X_n(x)\cdot T_n(t) = \sin\pi nx(A_n\cos\pi nt + B_n\sin\pi nt).$$

Для волнового уравнения эти решения называются собственными колебаниями. Во второй юните мы изучим их подробнее.

В силу линейности и однородности уравнения (53) их линейная комбинация

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi nx(A_n \cos\pi nt + B_n \sin\pi nt) \qquad (56)$$

также будет решением этого уравнения (см. §3, гл. I), причем функция U(x, t) удовлетворяет граничным условиям (54).

ШАГ 5. Определим коэффициенты A_n и B_n в (56), используя начальные условия (55). Из первого начального условия получим

$$U(x, 0) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\pi nx = \varphi(x). \qquad (57)$$

Приходим к тому, что начальная функция φ(x) разлагается в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. По теореме Стеклова (см. §2, гл. II) коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$A_n = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin\pi nx dx .$$

Из второго начального условия находятся коэффициенты B_n:

$$U_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi nx(-\pi nA_n \sin\pi nt + \pi nB_n \cos\pi nt),$$

$$U_t(x, 0) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n \pi n \sin\pi nx = \Psi(x).$$

Отсюда B_n равны

$$B_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \Psi(x)\sin\pi nx dx.$$

Вычислив коэффициенты A_n и B_n для конкретных начальных функций и подставив их значения в (56), мы получим решение задачи (53), (54), (55).

Метод Фурье также применим к уравнениям с бóльшим числом переменных. Покажем это на примере волнового уравнения на плоскости. Рассмотрим первую краевую задачу в круге:

$$U_{tt} = \Delta U,\ 0 < r < 1,\ 0 < t < \infty, \qquad (58)$$

$$U|_{r=1} = 0,\ 0 < t < \infty, \qquad (59)$$

$$U|_{t=0} = \Phi(r, \varphi),\ U_t|_{t=0} = \Psi(r, \varphi) \qquad (60)$$

ШАГ 1. Для того, чтобы применить метод разделения переменных, запишем уравнение (58) в цилиндрических координатах (r, φ, t):

$$U_{tt} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi}$$

и будем искать его решение в виде U(r, φ, t) = V(r, φ)T(t). Подставим эту функцию в уравнение:

$$U_t = VT',\ U_{tt} = VT'',\ U_r = V_rT,\ U_{rr} = V_{rr}T,\ U_\varphi = V_\varphi T,$$

$$U_{\varphi\varphi} = V_{\varphi\varphi}T \Rightarrow VT'' = (V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi})T.$$

Разделим переменные:

$$\frac{T''}{T} = \frac{V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi}}{V} = -\lambda.$$

Отсюда получим два уравнения:

a) $T'' + \lambda T = 0,$ (61)

b) $V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi} + \lambda V = 0.$ (62)

Из граничного условия (59) будем иметь

$$V(1,\varphi) = 0.$$ (63)

ШАГ 2. Уравнение (62) - с частными производными. Оно называется уравнением Гельмгольца. Постоянную λ в этом уравнении будем считать положительной. Доказательство того, что при $\lambda \le 0$ задача (62), (63) не имеет решений, мы опускаем. Для простоты будем также предполагать, что начальные значения Φ(r, φ) и Ψ(r, φ) не зависят от φ и искать решения U, зависящие только от r и t. Тогда задача (62), (63) будет иметь вид

$$V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \lambda V = 0,$$ (64)

$$V(1, \varphi) = 0.$$ (65)

Нетрудно проверить, что уравнение (64) можно переписать в виде

$$(rV'_r)'_r + \lambda rV = 0.$$

Это уравнение является уравнением Бесселя, оно совпадает с уравнением (38) при n = 0, а краевая задача (64), (65) совпадает с задачей (38). Условие ограниченности функции V при $r \to 0$ возникает из естественного условия ограниченности решения U(r,t) первоначальной задачи в центре круга. Решения этой задачи были получены ранее: собственные значения $\lambda_i = (\chi_i^{(0)})^2$, где $\chi_i^{(0)}$ - нули функции Бесселя нулевого порядка $J_0(z)$, а собственные функции $V_i = J_0(\chi_i^{(0)}r)$.

ШАГ 3. Уравнение (61) - обыкновенное дифференциальное уравнение. При $\lambda_i = (\chi_i^{(0)})^2$ его решения записываются в виде $T_i = A_i\cos\chi_i^{(0)}t + B_i\sin\chi_i^{(0)}t$.

ШАГ 4. Выпишем частные решения уравнения (58):

$$U_i(r, t) = V_i(r)T_i(t) = J_0(\chi_i^{(0)}r)(A_i\cos(\chi_i^{(0)}t) + B_i\sin(\chi_i^{(0)}t)).$$

Составим линейную комбинацию из этих решений

$$U(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\chi_i^{(0)}r\right)(A_i\cos(\chi_i^{(0)}t) + B_i\sin(\chi_i^{(0)}t)). \qquad (66)$$

ШАГ 5. Определим коэффициенты A_i и B_i, используя начальные условия(60). Из первого начального условия получим

$$U(r, 0) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(\chi_i^{(0)} r) = \Phi(r) \qquad (67)$$

Равенство (67) означает, что начальная функция $\Phi(r)$ разлагается в ряд Фурье по функциям Бесселя $J_0(\chi_i^{(0)}r)$. Используя формулы (39), выпишем коэффициенты Фурье

$$A_i = \frac{1}{\left\|J_0(\chi_i^{(0)} r)\right\|^2} \int_0^1 r\Phi(r) J_0(\chi_i^{(0)}r)dr.$$

Из второго начального условия находятся коэффициенты B_i:

$$U_t(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\chi_i^{(0)}r\right)(-\chi_i^{(0)} A_i\sin(\chi_i^{(0)}t) + \chi_i^{(0)} B_i\cos(\chi_i^{(0)}t)),$$

$$U_t(r, 0) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} B_i\chi_i^{(0)} J_0(\chi_i^{(0)} r) \equiv \Psi(r).$$

Отсюда B_i равны

$$B_i = \frac{1}{\chi_i^{(0)}\left\|J_0(\chi_i^{(0)} r)\right\|^2} \int_0^1 r\Psi(r) J_0(\chi_i^{(0)} r)dr.$$

Напомним, что нормы функций $J_0(\chi_i^{(0)}r)$ весовые, они вычисляются в книгах по специальным функциям. В частности $\| J_0(\chi_i^{(0)}r) \|^2 = \frac{1}{2} J_1^2(\chi_i^{(0)})$. После подстановки коэффициентов A_i и B_i в (66), получается решение задачи.

§4. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье

Метод разделения переменных применим к различным типам уравнений, в том числе и к эллиптическим уравнениям. Решим этим методом следующую задачу Дирихле

$$\Delta U = 0, \; U|_{r=1} = g(\varphi), 0 \le r < 1, \; 0 \le \varphi < 2\pi.$$

ШАГ 1. Запишем уравнение Лапласа в полярной системе координат:

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} = 0$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $U(r,\varphi) = V(r)\Phi(\varphi)$. После подстановки этой функции в уравнение получим:

$$U_r = V'\Phi,\ U_{rr} = V''\Phi,\ U_\varphi = V\Phi',\ U_{\varphi\varphi} = V\Phi'' \Rightarrow V'' + \frac{1}{r}V'\Phi + \frac{1}{r^2}V\Phi'' = 0$$

Разделим в уравнении переменные и каждую из полученных дробей обозначим через λ:

$$(V'' + \frac{1}{r}V')\frac{r^2}{V} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

Величина λ - постоянная, так как одна часть полученного уравнения не зависит от другой и равенство возможно только в случае, когда каждая часть постоянная. Отсюда будем иметь

$$a)\ r^2V'' + rV' - \lambda V = 0,$$

$$b)\ \Phi'' + \lambda\Phi = 0.$$

ШАГ 2. Решим уравнение b). При решении будем учитывать , что увеличивая переменную φ на 2π будем получать на плоскости ту же точку, что и с координатами (r, φ). Это означает, что функция Φ должна быть периодической. А это, в свою очередь означает, что постоянная $\lambda \geq 0$ и, более того, $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ В самом деле, чтобы общее решение

$$\Phi(\varphi) = C_1\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + C_2\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi$$

задавало периодические функции, необходимо, чтобы $\Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi)$, то есть

$$C_1\cos(\sqrt{\lambda}\,\varphi + 2\pi\sqrt{\lambda}) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}\,\varphi + 2\pi\sqrt{\lambda}) \equiv C_1\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + C_2\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi.$$

Значит $\sqrt{\lambda}$ должно быть целым числом: $\sqrt{\lambda} = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, решения уравнения b) будут иметь вид:

$$\Phi_n(\varphi) = C_n^1\cos n\varphi + C_n^2\sin n\varphi.$$

ШАГ 3. Подставим полученные значения λ в уравнение a):

$$r^2V'' + rV' - n^2V = 0 \qquad (68)$$

Уравнение (68) (так же, как и уравнение a)) называется уравнением Эйлера. Оно изучается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Известны его решения. При $n > 0$ общее решение этого уравнения имеет вид

$$V = A_nr^n + B_nr^{-n},$$

при $n = 0$ общее решение записывается в виде

$$V = A_0 + B_0\ln r.$$

Так как решение U первоначальной задачи должно быть ограничено в

круге, функции V(r) также должны быть ограничены при $r \to 0$. Это означает, что в полученных решениях коэффициенты B_n и B_0 равны нулю,то есть решения V_n имеют вид:

$$V_n = A_n r^n,\ n = 0, 1, 2 \ldots$$

ШАГ 4. Выпишем частные решения уравнения Лапласа:

$$U_n = V_n(r)\,\Phi_n(\varphi) = r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

где $a_n = A_n C^1_n$, $b_n = A_n C^2_n$ – произвольные постоянные.

В силу линейности и однородности уравнения Лапласа линейная комбинация этих решений

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \qquad (69)$$

также будет решением уравнения Лапласа (см. §3, гл. I).

ШАГ 5. Определим коэффициенты a_n и b_n, используя граничное условие $U|_{r=1} = g(\varphi)$:

$$U(1, \varphi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi = g(\varphi).$$

Полученное равенство означает, что функция $g(\varphi)$ разлагается в тригонометрический ряд Фурье на отрезке$[0, 2\pi]$. Коэффициенты этого ряда находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi,\ b_0 = 0,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi.$$

После подстановки вычисленных коэффициентов в ряд (69) будем иметь решение первоначальной задачи. Во второй юните мы ещё раз вернемся к этой задаче, но решим ее уже другим способом и в результате получим решение в виде

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \alpha) + r^2} g(\alpha)d\alpha$$

Это выражение называется интегральной формулой Пуассона для круга. В силу свойства единственности решения задачи Дирихле, которое также будет доказано во второй юните, эти два решения совпадают. К интегральной формуле можно придти и непосредственно, если проделать (довольно сложные) преобразования ряда (69).

В заключение проанализируем, что изменится в рассуждениях при решении внешней задачи Дирихле

$$\Delta U = 0,\ U|_{r=1} = g(\varphi),\ 1 < r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$U(r, \varphi)$ - ограничена при $r \to \infty$.

Все рассуждения на первом и втором шагах не изменятся. На третьем шаге изменится лишь то, что при отборе частных решений V(r) надо отбросить

функции $A_n r^n$ и $B_0 \ln r$, поскольку они не ограничены при $r \to \infty$, и оставить решения вида $V_n = B_n r^{-n}$, n = 0, 1, 2, ... Таким образом, частные решения уравнения Лапласа будут иметь вид $U_n = r^{-n}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$, где a_n и b_n - произвольные постоянные. Линейная комбинация этих решений

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \qquad (70)$$

также будет решением уравнения Лапласа. Коэффициенты Фурье a_0, b_0, a_n, b_n вычисляются по тем же формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi\,,\ b_0 = 0,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Ряд (70) можно преобразовать к виду

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - 1}{1 - 2r\cos(\varphi - \alpha) + r^2} g(\alpha)d\alpha\,.$$

Эта формула называется интегральной формулой Пуассона для внешности круга.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты и перечень основных зависимостей и формул.

2. Решите самостоятельно следующие задачи:

Вариант 1

1. Проверить, являются ли функции $\varphi(x) = \sin 2x$ и $\Psi(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ ортогональными на отрезке [0, 2].

2. Решить задачу Коши $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

3. Проверить, являются ли функции $U_1 = x^3y - 3xz + 4$ и $U_2 = xy^2 + 2xz - 5$ решениями уравнения

$$x^2U_{xx} + U_{yy} + y^2U_{zz} - U_z = 0.$$

4. Определить тип уравнения с частными производными:

a) $2U_{xx} + 3U_{xy} - 4U_{zz} + 5U_x - 7U = 0$

b) $U_{xx} + U_{xy} + U_{zz} + 4U = 0$

5. Найти области на плоскости (x, y), в которых уравнение

$$(y^2 + 1)^2U_{xx} + +4(y^2 + 1)U_{xy} + (|x| + |x - 4|)U_{yy} - U_y = 0$$

имеет параболический тип.

6. Решить краевую задачу $y'' - y = e^x$, $y'(0) = y'(1) = 0$.

7. Проверить, являются ли функции $y_1 = \cos\frac{\pi}{6}x$ и $y_2 = \cos\pi x$ собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = y'(6) = 0$. Найти соответствующие собственные значения, если они существуют.

8. Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в тонком однородном стержне длиной $\ell = 4$. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, концы поддерживаются при постоянной температуре 100^0, начальное распределение температуры $\varphi(x) = 100^0 + x(4 - x)$.

Вариант 2

1. Проверить, являются ли функции $\varphi(x) = \sin\pi x$ и $\Psi(x) = \cos 3\pi x$ ортогональными на отрезке [0, 1].

2. Решить задачу Коши $y'' + 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3. Проверить, являются ли функции $U_1 = x + y + 3z^2$ и $U_2 = x^2 + y^2 + z^2$ решениями уравнения $\Delta U = 6$.

4. Определить тип уравнения с частными производными:

a) $U_{xx} - 2U_{xy} + 10U_{yy} + U = 0$,

b) $2U_{xx} + 4U_{xy} + 2U_{yy} - 2Ux + 4U_y = 0$.

5. Найти области на плоскости (x, y), в которых уравнение

$$(y^2 + 1)U_{xx} - x(U_{xy} + U_{yy}) + y(U_x + U_y) = 0$$

имеет гиперболический тип.

6. Решить краевую задачу $y'' + 4y = x$, $y(0) = y'(\pi) = 0$.

7. Проверить, является ли функции $y_1 = \cos 2x$ и $y_2 = \cos x$ собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$. Найти соответствующие собственные значения, если они существуют.

8. Привести математическую формулировку задачи о колебании тонкой однородной струны длиной $\ell = 10$, жестко закрепленной на концах,если в начальный момент отклонение точек струны от положения равновесия определяется по формуле $\varphi(x) = x(x - 10)$, а начальные скорости равны нулю.

Вариант 3

1. Проверить, являются ли функции $\varphi(x) = \sin\frac{\pi}{3}x$ и $\Psi(x) = \cos\frac{2\pi}{3}x$ ортогональными на отрезке $[0, 3]$.

2. Решить задачу Коши $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

3. Проверить, являются ли функции $U_1 = 3xyz - \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$ и $U_2 = xy + 3x^2 - 3y^2 + 5$ решениями уравнения

$$xy(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) - 2(yU_x + xU_y) = -2(x^2 + y^2).$$

4. Определить тип уравнения с частными производными:

a) $2U_{yy} - U_{xy} + 3U_x - U = 0,$

b) $4(U_{xx} + U_{yy}) - U_{xy} + 2(U_x + U_y) = 0.$

5. Найти области на плоскости (x, y), в которых уравнение

$$y^2U_{xx} + 2yU_{xy} + (x^2 + y^2)U_{yy} - 2xyU = 0$$

имеет гиперболический тип.

6. Решить краевую задачу $y'' - 4y = x$, $y'(0) = y(2) = 0$.

7. Проверить, являются ли функции $y_1 = \cos\frac{x}{3}$ и $y_2 = \cos\frac{x}{2}$ собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = y'(3\pi) = 0$. Найти соответствующие собственные значения, если они существуют.

8. Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в тонком однородном стержне длиной $\ell = 15$. Боковая поверхность стержня и правый конец теплоизолированы, а левый конец поддерживается при постоянной температуре 50^0, начальное распределение температуры $\varphi(x) = \frac{9}{2}x^2$.

Вариант 4

1. Проверить, являются ли функции $\varphi(x) = \cos\frac{3\pi}{2}x$ и $\Psi(x) = \cos\pi x$ ортогональными на отрезке $[-1, 1]$.

2. Решить задачу Коши $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

3. Проверить, являются ли функции $U_1 = xy(z + 1) + (x + 1)y - 2yz$ и $U_2 = 3xy + x - y + 4$ решениями уравнения

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0.$$

4. Определить тип уравнения с частными производными:

a) $2U_{xx} - 4U_{xy} - 2U_{yy} + 3(U_x + U_y) - U = 0,$

b) $3U_{xx} - U_{xy} + 2U_{yy} + 4U = 0.$

5. Найти области на плоскости (x, y), в которых уравнение

$$x^3U_{xx} + 2xyU_{xy} + y(1 + x)U_{yy} - U = 0$$

имеет эллиптический тип.

6. Решить краевую задачу $4y'' + y = \cos x$, $y(-\pi) = y'(\pi) = 0$.

7. Проверить, являются ли функции $y_1 = \sin\frac{5\pi}{4}x$ и $y_2 = \sin\frac{\pi}{4}x$ собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(2) = 0$. Найти соответствующие собственные значения, если они существуют.

8. Привести математическую формулировку задачи о колебании тонкой однородной струны длиной $\ell = 5$, жестко закрепленной на концах, если в начальный момент она находится в положении равновесия а начальные скорости точек струны определяется по формуле $\psi(x) = x(5 - x)$.

Вариант 5

1. Проверить, являются ли функции $\varphi(x) = \cos 5x$ и $\Psi(x) = \sin 3x$ ортогональными на отрезке $[-\pi, \pi]$.

2. Решить задачу Коши $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

3. Проверить, являются ли функции $U_1 = x^2 - 2xy + 5x - 4y + z$ и $U_2 = x^2 + y^2 - 3xyz + 4x$ решениями уравнения

$$U_{xx} + (x + y)U_{yy} + (z + y)U_{zz} - (U_x + U_y + U_z) - 2y = 0.$$

4. Определить тип уравнения с частными производными:

a) $3(U_{xx} + U_{yy}) - 6U_{xy} - 2(U_x + U) = 0,$

b) $5U_{xy} + 3(U_{xx} + U_x) - U_y = 0.$

5. Найти области на плоскости (x, y), в которых уравнение

$$(x^2 + y^2)U_{xx} + (x + y)U_{xy} + (x + y)^2U_{yy} - 6xU_x + U = 0$$

имеет эллиптический тип.

6. Решить краевую задачу $y'' + y = e^x$, $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

7. Проверить, являются ли функции $y_1 = \sin 2\pi x$ и $y_2 = \sin\frac{\pi}{3}x$ собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(3) = 0$. Найти соответствующие собственные значения, если они существуют.

8. Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в тонком однородном стержне длиной $\ell = 6$, боковая поверхность и концы которого теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой $\varphi(x) = 10\cos\frac{\pi}{6}x$.

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №1

Задание

Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 0, \text{ если } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

по ортогональной системе функций {sinπnx, n = 1, 2, ...}.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	Вычислить нормы функций, входящих в ортогональную систему	$\|\sin \pi nx\|^2 = \int_0^1 \sin^2 \pi nx dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \cos 2\pi nx)dx = = \frac{1}{2}x\Big|_0^1 - \frac{1}{4\pi n}\sin 2\pi nx\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$
2	Вычислить коэффициенты ряда Фурье по ортогональной системе	$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin \pi nx dx = 2\int_0^{1/2} \sin \pi nx dx = = -\frac{2}{\pi n}\cos \pi nx\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos\frac{\pi n}{2}).$
3	Записать ряд Фурье функции	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1 - \cos\frac{\pi n}{2})\sin \pi nx.$

Решите самостоятельно задачи разложения функций:

1.1. $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 0, \text{ если } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

по ортогональной системе функций {cosπnx, n = 0, 1, 2,...}.

1.2. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ если } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

по ортогональной системе функций {sinnx, n = 1, 2, ...}.

1.3. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ если } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

по ортогональной системе функций {cosnx, n = 0, 1, 2, ...}.

1.4. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ если } -2 \le x < 0, \\ 0, \text{ если } 0 \le x \le 2 \end{cases}$

по ортогональной системе функций $\{1, \cos\frac{\pi}{2}nx, \sin\frac{\pi}{2}nx, n = 1, 2, ...\}$.

1.5. f(x) = x на отрезке $[-\pi, \pi]$ по ортогональной системе функций {1, cosnx, sinnx, n = 1,2,...}.

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №2

Задание

Решить краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения $y'' + \lambda y = 0$ при $\lambda = 1$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 1$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	Найти общее решение дифференциального уравнения	$y'' + y = 0$, $r^2 + 1 = 0$, $r_{1,2} = \pm i$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y = C_1\cos x + C_2\sin x$
2	Подставить краевые условия и определить значения произвольных постоянных	$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 0, \\ -C_1\sin\pi + C_2\cos\pi = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -1 \end{cases}$
3	Подставить полученные значения постоянных в общее решение и записать решение краевой задачи	$y = -\sin x$

Решите самостоятельно краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений:

2.1. $y'' + \lambda y = 0$ при $\lambda = -1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$.

2.2. $y'' + \lambda y = 0$ при $\lambda = 4$, $y'(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

2.3. $y'' + \lambda y = 0$ при $\lambda = -4$, $y'(0) = 0$, $y(\frac{1}{2}) = 1$.

2.4. $y'' + \lambda y = 0$ при $\lambda = 1$, $y'(0) = 1$, $y'(\pi) = 0$.

2.5. $y'' + \lambda y = 0$ при $\lambda = -1$, $y(0) = y(1) = 0$.

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №3

Задание

Решить задачу Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$. Проверить ортогональность собственных функций.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	Предположить $\lambda < 0$ и найти общее решение дифференциального уравнения.	$y'' + \lambda y = 0,\ r^2 + \lambda = 0,\ r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$, $y_1 = e^{\sqrt{-\lambda}x},\ y_2 = e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
2	Подставить краевые условия и проверить отсутствие собственных значений и собственных функций.	$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi} < 0$ Следовательно $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, т. е. $y = 0$.
3	Предположить $\lambda = 0$ и найти общее решение дифференциального уравнения.	$y'' = 0,\ r^2 = 0,\ r_{1,2} = 0,$ $y_1 = e^{0x} \equiv 1,\ y_2 = xe^{0x} \equiv x,$ $y = C_1 + C_2 x$
4	Подставить краевые условия и найти собственную функцию, если она существует.	$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 + C_2 \cdot \pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$ Следовательно, $y = 0$.
5	Предположить $\lambda > 0$ и найти общее решение дифференциального уравнения.	$y'' + \lambda y = 0,\ r^2 + \lambda = 0,\ r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\,i,$ $y_1 = \cos\sqrt{\lambda}\,x,\ y_2 = \sin\sqrt{\lambda}\,x,$ $y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$
6	Подставить краевые условия и найти собственные значения и собственные функции.	$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \end{cases}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \end{cases}$ Следовательно, $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0,\ \sqrt{\lambda}\,\pi = \pi n,\ \sqrt{\lambda} = n,$ $\lambda_n = n^2,\ n = 1, 2, \ldots,$ - собственные значения; $y_n = \sin nx,\ n = 1, 2, \ldots,$ - собственные функции.

7	Проверить ортогональность собственных функций.	$\int_0^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(n-m)x\, dx -$ $- \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(n+m)x\, dx = \frac{1}{2(n-m)} \sin(n-m)x\Big|_0^{\pi} -$ $- \frac{1}{2(n+m)} \sin(n+m)\, x\Big|_0^{\pi} =$ $= \frac{1}{2(n-m)} \sin(n-m)\pi - \frac{1}{2(n-m)} \sin 0 -$ $- \frac{1}{2(n+m)} \sin(n+m)\pi + \frac{1}{2(n+m)} \sin 0 = 0$ при $n \neq m$. $\int_0^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2nx)dx =$ $= \frac{1}{2} x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4n} \sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$

Решите самостоятельно задачи Штурма–Лиувилля и проверьте ортогональность собственных функций:

3.1. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$.

3.2. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(\pi) = 0$.

3.3. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = y(\pi) = 0$.

3.4. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$.

3.5. $y'' + \lambda y = 0$, $y(1) = y(2) = 0$.

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №4

Задание

Решить краевую задачу для волнового уравнения методом Фурье:

$$U_{tt} = U_{xx},\ U(0, t) = U(1, t) = 0,\ U(x, 0) = x(1 - x),\ U_t(x, 0) = 0.$$

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0, t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	Методом Фурье провести разделение переменных в волновом уравнении и использовать граничные условия	$U_{tt} = U_{xx}$, $U(x, t) = X(x)\cdot T(t)$, $U_t = X\cdot T'$, $U_{tt} = X\cdot T''$, $U_x = X'\cdot T$, $U_{xx} = X''\cdot T$. Тогда $X\cdot T'' = X''\cdot T$ или $\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$. $U(0, t) = X(0)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$, $U(1, t) = X(1)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$. Отсюда имеем:

		a) задача Штурма – Лиувилля $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$ b) $T'' + \lambda T = 0$.
2	Решить задачу Штурма–Лиувилля	Решим уравнение $X'' + \lambda X = 0,\ \lambda > 0,\ r^2 + \lambda = 0,\ r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i,$ $X_1 = \cos\sqrt{\lambda}\, x,\ X_2 = \sin\sqrt{\lambda}\, x,$ $X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x.$ Подставим граничные условия $\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 0 \\ C_1\cos\sqrt{\lambda} + C_2\sin\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2\sin\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$ $\sin\sqrt{\lambda} = 0,\ \sqrt{\lambda} = \pi n,\ \lambda_n = \pi^2 n^2,\ X_n = \sin\pi n x,$ $n = 1, 2, \ldots$
3	Подставить собственные значения во второе уравнение, найти его общее решение	$T'' + \lambda T = 0,\ \lambda_n = \pi^2 n^2,\ \Rightarrow T_n'' + \pi^2 n^2 T_n = 0,$ $r^2 + \pi^2 n^2 = 0,\ r_{1,2} = \pm\pi n i,\ T_{n1} = \cos\pi n t,$ $T_{n2} = \sin\pi n t,\ T_n = A_n\cos\pi n t + B_n \sin\pi n t.$
4	Составить решение уравнения с частными производными, удовлетворяющее граничным условиям, в виде функционального ряда	$U_n(x, t) = X_n(x)\cdot T_n(t) = \sin\pi n x(A_n\cos\pi n t +$ $+ B_n \sin\pi n t)$ $U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi n x(A_n\cos\pi n t +$ $+ B_n \sin\pi n t)$
5	Подставив в решение начальные условия, найти коэффициенты ряда	$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\pi n x = x(1 - x).$ $U_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi n x(-A_n \pi n \sin\pi n t + B_n \pi n \cos\pi n t)$ $U_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \pi n \sin\pi n x = 0$ Отсюда получим $B_n = 0,\ A_n = 2\int_0^1 x(1 - x)\sin\pi n x\, dx.$

		При вычислении интеграла применим табличную формулу из файла материалов $A_n = (\frac{2}{\pi^2 n^2} \sin\pi nx - \frac{2}{\pi n} x \cos\pi nx) \Big|_0^l +$ $+(\frac{2}{\pi n} x^2 \cos\pi nx - \frac{4}{\pi^2 n^2} x \sin\pi nx -$ $- \frac{4}{\pi^3 n^3} \cos\pi nx) \Big|_0^l = -\frac{2}{\pi n}(-1)^n + \frac{2}{\pi n}(-1)^n -$ $- \frac{4}{\pi^3 n^3}(-1)^n + \frac{4}{\pi^3 n^3} = \frac{4}{\pi^3 n^3}(1 - (-1)^n)$
6	Выписать решение краевой задачи, подставив найденные коэффициенты	$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^3 n^3}(1 - (-1)^n) \sin\pi nx \cdot \cos\pi nt$
7	Вычислить приближенно значение решения, взяв несколько первых членов ряда и подставив значения переменных $x = x_0$, $t = t_0$	Возьмем первые два ненулевых члена ряда: $U(x, t) \cong \frac{8}{\pi^3} \sin\pi x \cdot \cos\pi t + \frac{8}{27\pi^3} \sin 3\pi x \cdot \cos 3\pi t.$ Вычислим приближенно значение решения при $x_0 = \frac{1}{2}$, $t_0 = \frac{1}{3}$: $U(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \cong \frac{8}{\pi^3} \sin\frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{3} + \frac{8}{27\pi^3} \sin\frac{3\pi}{2} \cdot$ $\cdot\cos\pi = \frac{4}{\pi^3} + \frac{8}{27\pi^3} \cong 0{,}1386$

Решите самостоятельно краевые задачи для волнового уравнения методом Фурье:

4.1. $U_{tt} = U_{xx}$, $U(0, t) = U(\pi, t) = 0$, $U(x, 0) = x(x - \pi)$, $U_t(x, 0) = 0$

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0, t_0) = (\frac{\pi}{3}, \pi)$.

4.2. $U_{tt} = U_{xx}$, $U(0, t) = U_x(1, t) = 0$, $U(x, 0) = 0$, $U_t(x, 0) = x(2 - x)$

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0, t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

✓4.3. $U_{tt} = U_{xx}$, $U_x(0, t) = U(1, t) = 0$, $U(x, 0) = 0$, $U_t(x, 0) = x^2 - 1$

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0,t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4.4. $U_{tt} = U_{xx}$, $U_x(0, t) = U_x(1, t) = 0$, $U(x, 0) = 2\sin^2\frac{1}{2}\pi x$, $U_t(x, 0) = 1$

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0,t_0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

4.5. $U_{tt} = U_{xx}$, $U(0, t) = U(1, t) = 0$, $U(x, 0) = 0$, $U_t(x, 0) = x(1 - x)$

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0,t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №5

Задание

Решить краевую задачу для уравнения теплопроводности методом Фурье:

$$U_t = U_{xx},\ U(0, t) = U_x(1, t) = 0,\ U(x, 0) = x(2 - x)$$

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0, t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{10})$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	Методом Фурье провести разделение переменных в уравнении теплопроводности и использовать граничные условия	$U_t = U_{xx}$, $U(x, t) = X(x)\cdot T(t)$, $U_t = X\cdot T'$, $U_x = X'\cdot T$, $U_{xx} = X''\cdot T$. Тогда $X\cdot T' = X''\cdot T$ или $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$. $U(0, t) = X(0)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$, $U_x(1, t) = X'(1)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X'(1) = 0$. Отсюда имеем: а) задача Штурма–Лиувилля $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X'(1) = 0, \end{cases}$ б) $T' + \lambda T = 0$.
2	Решить задачу Штурма - Лиувилля	Решим уравнение $X'' + \lambda X = 0,\ \lambda > 0,\ r^2 + \lambda = 0,\ r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\, i$, $X_1 = \cos\sqrt{\lambda}x,\ X_2 = \sin\sqrt{\lambda}x$, $X = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$. Подставим граничные условия $\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 0 \\ -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$ $\cos\sqrt{\lambda} = 0,\ \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \lambda_n = \frac{\pi^2}{4}(1 + 2n)^2$, $X_n = \sin\frac{\pi}{2}(1 + 2n)x,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

3	Подставить собственные значения во второе уравнение, найти его общее решение	$T' + \lambda T = 0$, $\lambda_n = \frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow T_n' + \frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2 T_n = 0$, $r + \frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2 = 0$, $r = -\frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2$, $T_n = A_n e^{\frac{-\pi^2(1+2n)^2}{4}t}$
4	Составить решение уравнения с частными производными, удовлетворяющее граничным условиям, в виде функционального ряда	$U_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) =$ $= A_n \sin\frac{\pi}{2}(1+2n)x\, e^{\frac{-\pi^2(1+2n)^2}{4}t}$. $U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, t) =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi}{2}(1+2n)\, x e^{\frac{-\pi^2(1+2n)^2}{4}t}$.
5	Подставив в решение начальное условие, найти коэффициенты ряда	$U(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi}{2}(1+2n)x = x(2-x)$. Отсюда получим $A_n = 2\int_0^l x(2-x)\sin\frac{\pi}{2}(1+2n)x\, dx$. При вычислении интеграла применим табличную формулу из файла материалов $A_n = \frac{4(-4x+4)}{\pi^2(2n+1)^2}\cos\frac{\pi}{2}(2n+1)x\Big|_0^l +$ $\left(\frac{8x-4x^2}{\pi(2n+1)} + \frac{32}{\pi^3(2n+1)^3}\right)\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)x\Big|_0^l =$ $= -\frac{16}{\pi^2(2n+1)^2} + \left(\frac{4}{\pi(2n+1)} + \frac{32}{\pi^3(2n+1)^3}\right) \cdot$ $\cdot \sin\frac{\pi}{2}(2n+1)$.
6	Выписать решение краевой задачи, подставив найденные коэффициенты	$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [-\frac{16}{\pi^2(2n+1)^2} +$ $+\left(\frac{4}{\pi(2n+1)} + \frac{32}{\pi^3(2n+1)^3}\right)\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)] \cdot$ $\cdot \sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\, x e^{\frac{-\pi^2(1+2n)^2}{4}t}$.

7	Вычислить приближенно значение решения, взяв несколько первых членов ряда и подставив значения переменных $x = x_0$, $t = t_0$	Возьмем первые два члена ряда: $U(x, t) \cong [-\frac{16}{\pi^2} + \frac{4}{\pi} + \frac{32}{\pi^3}]\sin\frac{\pi}{2}x \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4}t} +$ $+[-\frac{16}{9\pi^2} - \frac{4}{3\pi} - \frac{32}{27\pi^3}]\sin\frac{3\pi}{2}x \cdot e^{-\frac{9\pi^2}{4}t}$ Вычислим приближенно значение решения при $(x_0, t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{10})$: $U(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}) \cong [-\frac{16}{\pi^2} + \frac{4}{\pi} + \frac{32}{\pi^3}]\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi^2}{40}} +$ $+[-\frac{16}{9\pi^2} - \frac{4}{3\pi} - \frac{32}{27\pi^3}]\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{9\pi^2}{40}} \cong 0{,}3287.$

Решите самостоятельно краевые задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье:

5.1. $U_t = U_{xx}$, $U(0, t) = U(1, t) = 0$, $U(x, 0) = x(1 - x)$.

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0,t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{10})$.

5.2. $U_t = U_{xx}$, $U(0, t) = U(\pi, t) = 0$, $U(x, 0) = x(x - \pi)$.

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0,t_0) = (\frac{\pi}{6}, 1)$.

5.3. $U_t = U_{xx}$, $U_x(0, t) = U_x(1, t) = 0$, $U(x, 0) = 2\sin^2\frac{\pi}{2}x$

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0,t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{10})$.

5.4. $U_t = U_{xx}$, $U_x(0, t) = U(1, t) = 0$, $U(x, 0) = x^2 - 1$.

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0,t_0) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{10})$.

5.5. $U_t = U_{xx}$, $U_x(0, t) = U(\pi, t) = 0$, $U(x, 0) = 1 - 2\cos^2\frac{1}{4}x$

Вычислить приближенно значение решения в точке $(x_0;t_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{10})$.

ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ

Примеры отработки решения задач
Введение. Классификация дифференциальных уравнений

Перед решением примеров вспомните основные определения и формулы главы *I*.

Пример 1. Проверить, являются ли ортогональными функции $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ и $\psi(x) = \cos\frac{2\pi x}{3}$ на отрезке [0, 3].

Решение. Используя определение ортогональных функций запишем

$$\int_0^3 \psi(x)\varphi(x)dx = \int_0^3 \cos\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{\pi x}{2}dx .$$

Полученный интеграл можно вычислить непосредственно, применяя методы интегрирования тригонометрических функций, а можно воспользоваться табличным интегралом из файла материалов:

$$\int_0^3 \cos\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{\pi x}{2}dx = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)x}{2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}\Bigg|_0^3 - \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)x}{2\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}\Bigg|_0^3 = \frac{3}{\pi}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi}\cos 0 -$$

$$-\frac{3}{7\pi}\cos\frac{7\pi}{2} + \frac{3}{7\pi}\cos 0 = -\frac{18}{7\pi}.$$

Так как интеграл не равен нулю, функции не ортогональны.

Пример 2. Найти нормы функций $\varphi_n(x) = \cos\frac{4}{3}nx$ на отрезке $[-3\pi, 3\pi]$, $n = 1, 2, \ldots$.

Решение. По определению $\|\varphi_n(x)\|^2 = \int_{-3\pi}^{3\pi}\cos^2\frac{4}{3}nxdx$. Вычислим этот интеграл, используя методы интегрирования тригонометрических выражений:

$$\int_{-3\pi}^{3\pi}\cos^2\frac{4}{3}nxdx = \frac{1}{2}\int_{-3\pi}^{3\pi}(1+\cos\frac{8}{3}nx)dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-3\pi}^{3\pi} + \frac{3}{16n}\sin\frac{8}{3}nx\Big|_{-3\pi}^{3\pi} = 3\pi + \frac{3}{8}\sin 8\pi n = 3\pi.$$

Отсюда $\|\varphi_n(x)\| = \sqrt{3\pi}$.

Пример 3. Решить задачу Коши

$$y'' + 6y' + 10y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$r^2 + 6r + 10 = 0,\ r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = -3 \pm i\ .$$

Запишем частные линейно независимые решения дифференциального уравнения и общее решение:

$$y_1 = e^{-3x}\cos x\ ,\ y_2 = e^{-3x}\sin x\ ,\ y = C_1 e^{-3x}\cos x + C_2 e^{-3x}\sin x$$

Определим коэффициенты C_1 и C_2 из начальных условий. Подставим первое условие в общее решение:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Продифференцируем общее решение и подставим второе условие:

$$y' = -3C_1 e^{-3x}\cos x - C_1 e^{-3x}\sin x - 3C_2 e^{-3x}\sin x + C_2 e^{-3x}\cos x\ ,$$

$$y'(0) = 3 \Rightarrow 3 = -3C_2 e^0 \sin 0 + C_2 e^0 \cos 0 \Rightarrow C_2 = 3.$$

Выпишем решение задачи Коши, подставив найденные значения C_1 и C_2 в общее решение:

$$y = 3e^{-3x}\sin x$$

Пример 4. Проверить, являются ли функции

$$U_1 = 3x^2 - xy + 4 \text{ и } U_2 = z^2 - 2x^3y + 3x$$

решениями уравнения Пуассона $\Delta U = 2(1 - 6xy)$.

Решение. 1. Найдем частные производные первой функции: $U_{1x} = 6x - y$, $U_{1xx} = 6$, $U_{1y} = -x$, $U_{1yy} = 0$, $U_{1z} = 0$, $U_{1zz} = 0$. Подставим производные в уравнение: $\Delta U_1 \equiv U_{1xx} + U_{1yy} + U_{1zz} = 6 \neq 2(1 - 6xy)$. Следовательно, первая функция не является решением данного уравнения.

2. Найдем частные производные второй функции:

$U_{2x} = -6x^2y + 3$, $U_{2xx} = -12xy$, $U_{2y} = -2x^3$, $U_{2yy} = 0$, $U_{2z} = 2z$, $U_{2zz} = 2$. Подставим производные в уравнение: $\Delta U \equiv U_{2xx} + U_{2yy} + U_{2zz} = -12xy + 2 \equiv 2(1 - 6xy)$. Значит, функция является решением уравнения.

Пример 5. Проверить, является ли функция $U = \ln(xy) + x^2y$ решением уравнений $xU_x + x^2y^3U_{yy} - yU_y = 0$ и $x^2U_{xx} + 2x^2y^3U_{yy} = -1$.

Решение. 1. Найдем частные производные:

$$U_x = \frac{1}{xy}y + 2xy = \frac{1}{x} + 2xy,\ U_{xx} = -\frac{1}{x^2} + 2y,\ U_y = \frac{1}{xy}x + x^2 = \frac{1}{y} + x^2,\ U_{yy} = -\frac{1}{y^2}\ .$$

2. Подставим частные производные в первое уравнение:

$$x\left(\frac{1}{x} + 2xy\right) + x^2y^3\left(-\frac{1}{y^2}\right) - y\left(\frac{1}{y} + x^2\right) = 1 + 2x^2y - x^2y - 1 - x^2y \equiv 0.$$

Значит, функция является решением первого уравнения.

3. Подставим частные производные во второе уравнение:

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}+2y\right)+2x^2y^3\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -1 + 2x^2y - 2x^2y = -1.$$

Функция является решением второго уравнения.

Пример 6. Определить тип уравнения с частными производными

a) $4U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} - 3U_x + U = 0;$

b) $U_{xy} + 5U_{xy} - 2U_{yy} + U_y - 2U_x = 1;$

c) $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} - 2U_y + U = 2x.$

Решение. Для того, чтобы определить тип линейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка, нужно вычислить выражение $\delta(x, y) \equiv B^2 - 4AC$, где A, B и C - значения коэффициентов в точке (x, y) как частных производных U_{xx}, U_{xy}, и U_{yy}, соответственно.

Так как все заданные уравнения с постоянными коэффициентами, величина $\delta(x, y)$ - постоянная. В случае a) величина $\delta(x, y) = 4 - 16 = -12 < 0$, следовательно, уравнение имеет эллиптический тип. В случае b) величина $\delta(x, y) = 25 + 8 = 33 > 0$ и уравнение имеет гиперболический тип. Наконец, в случае c) величина $\delta(x, y) = 16 - 16 = 0$. Значит, уравнение имеет параболический тип.

Пример 7. Найти области на плоскости (x, y), в которых уравнение $xU_{xx} + xU_{xy} + y^2U_{yy} - U_x + yU_y - U = 0$ будет иметь: а) эллиптический тип; б) гиперболический тип.

Решение. Тип линейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка определяется знаком величины $\delta(x, y) \equiv B^2 - 4AC$. Для заданного уравнения $\delta(x, y) = x^2 - 4xy^2 = x(x - 4y^2)$. Определим области, в которых $\delta(x, y) < 0$, и области, в которых $\delta(x, y) > 0$. Для этого на плоскости построим линии, на которых $\delta(x, y) = 0$ (эти линии разделяют области эллиптичности и гиперболичности уравнения):

$x(x - 4y^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = 4y^2$ (см. рис. 12).

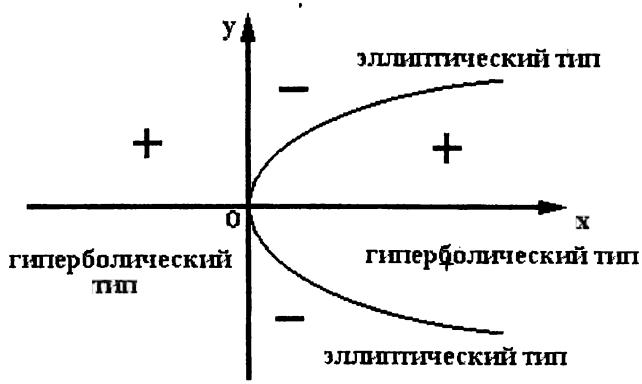

Рис. 12

Для определения знака выражения $\delta(x, y)$ в каждой области выбираем точку и вычисляем значение $\delta(x, y)$ в этой точке. В результате получаем две области, в которых уравнение будет иметь эллиптический тип, и две области, в которых оно имеет гиперболический тип (см. рис. 12).

Задача Штурма - Лиувилля

Данной теме посвящена глава II.

Пример 8. Решить краевую задачу

$$y'' - 4y = 0,\ y(1) = 0,\ y(2) = 1.$$

Решение. 1. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения:

$y'' - 4y = 0,\ r^2 - 4 = 0,\ r_1 = 2,\ r_2 = -2,\ y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{-2x},\ y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

2. Определим C_1 и C_2, используя краевые условия:

$$\begin{cases} C_1e^{2} + C_2e^{-2} = 0 \\ C_1e^{4} + C_2e^{-4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} e^{2} & e^{-2} \\ e^{4} & e^{-4} \end{vmatrix} = e^{-2} - e^{2} = -(e^{2} - e^{-2}),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2} \\ 1 & e^{-4} \end{vmatrix} = -e^{-2},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2} & 0 \\ e^{4} & 1 \end{vmatrix} = e^{2},\ \Rightarrow C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{e^{-2}}{e^{2} - e^{-2}},\ C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{e^{2}}{e^{2} - e^{-2}}.$$

3. Запишем решение краевой задачи, подставив C_1 и C_2 в общее решение:

$$y = \frac{e^{-2} \cdot e^{2x}}{e^{2} - e^{-2}} - \frac{e^{2} \cdot e^{-2x}}{e^{2} - e^{-2}} = \frac{e^{2(x-1)} - e^{-2(x-1)}}{e^{2} - e^{-2}}.$$

Пример 9. Решить краевую задачу

$$y'' + y = \cos x,\ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0.$$

Решение. 1. Найдем общее решение однородного уравнения, соответствующего данному уравнению:

$y'' + y = 0,\ r^2 + 1 = 0,\ r_{1,2} = \pm i,\ y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x,\ y = C_1\cos x + C_2\sin x.$

2. Определим частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов:

$$\bar{y} = Ax\cos x + Bx\sin x,\ \bar{y}' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$

$$\bar{y}'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) \Rightarrow \bar{y}'' + \bar{y} = -2A\sin x + 2B\cos x \equiv \cos x$$

или $-2A = 0,\ 2B = 1 \Rightarrow A = 0,\ B = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{2}x\sin x.$

3. Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$Y = y + \bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x.$$

4. Определим коэффициенты C_1 и C_2, используя краевые условия:

$Y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$;

$$Y' = -C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x,\ Y'(\pi) = 0 \Rightarrow -C_2 - \frac{1}{2}\pi = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}\pi.$$

5. Запишем решение краевой задачи, подставив C_1 и C_2 в общее решение:

$$y = -\frac{\pi}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\sin x = \frac{x-\pi}{2}\sin x\ .$$

Пример 10. Проверить, являются ли функции $y_1 = \sin\pi x$ и $y_2 = \cos\frac{\pi}{2}x$ собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(\frac{1}{2}) = 0$. Найти соответствующие собственные значения, если они существуют.

Решение. 1. Проверим, удовлетворяют ли эти функции краевым условиям:

$y_1(0) = \sin 0 = 0$ (удовлетворяет),

$$y'_1 = \pi\cdot\cos\pi x,\ y'_1(1) = \pi\cdot\cos\pi\frac{1}{2} = 0 \text{ (удовлетворяет)},$$

$y_2(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$ (не удовлетворяет), $\Rightarrow y_2$ не является собственной функцией.

2. Подставим функцию y_1 в дифференциальное уравнение и определим коэффициент λ:

$$y_1 = \sin\pi x,\ y'_1 = \pi\cos\pi x,\ y''_1 = -\pi\sin\pi x,\ \Rightarrow -\pi\sin\pi x + \lambda\sin\pi x \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda - \pi)\sin\pi x \equiv 0 \Rightarrow \lambda = \pi \text{ (собственное значение)}.$$

Пример 11. Разложить функцию $y = x(x-2)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y'(1) = y(2) = 0$.

Решение. 1. С помощью замены независимой переменной сведем данную задачу к задаче Штурма-Лиувилля на отрезке $[0, 1]$. Пусть $t = x - 1$. Тогда при $x = 1$ значение $t = 0$ и при $x = 2$ значение $t = 1$. Дифференциальное уравнение и краевые условия при такой замене не изменятся:

$$y'_x = y'_t\,t'_x = y'_t,\ y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_t)'_t\,t'_x = y''_{tt};\ y'_x(1) = y'_t(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_{tt} + \lambda y = 0,\ y'(0) = y(1) = 0 \qquad (*)$$

Задача (*) совпадает с задачей Штурма-Лиувилля (31) при $\ell = 1$. Собственные функции этой задачи находятся по формулам (31′) при $\ell = 1$:

$$y_n = \cos\frac{\pi}{2}(2n+1)t \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а собственные значения имеют вид $\lambda_n = \frac{\pi^2}{4}(2n+1)^2$.

2.Функция $y = x(x - 2)$ при замене переменной преобразуется к виду $y = (t + 1)(t - 1) = t^2 - 1$. По теореме Стеклова эта функция разлагается в ряд Фурье вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n \ ,$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам:

$$C_n = 2\int_0^1 y(t)y_n(t)dt = 2\int_0^1 (t^2 - 1)\cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)tdt.$$

Интегралы вычислим с помощью табличных формул из файла материалов:

$$2\int_0^1 (t^2 - 1)\cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)tdt = \frac{16t}{\pi^2(2n+1)^2}\cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)\,t\Big|_0^1 + 2\Big(\frac{2t^2}{\pi(2n+1)} -$$

$$- \frac{16}{\pi^3(2n+1)^3}\Big)\sin\frac{\pi}{2}(2n + 1)\,t\Big|_0^1 - \frac{4}{\pi(2n+1)}\sin\frac{\pi}{2}(2n + 1)\,t\Big|_0^1 = \frac{32\cdot(-1)^{n+1}}{\pi^3(2n+1)^3}.$$

(Здесь при нахождении значений тригонометрических функций используются формулы $\cos\frac{\pi}{2}(2n + 1) = 0$ и $\sin\frac{\pi}{2}(2n + 1) = (-1)^n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Значит, коэффициенты Фурье $C_n = \frac{32\cdot(-1)^{n+1}}{\pi^3(2n+1)^3}$. Следовательно, ряд Фурье функции $y(t)$ имеет вид

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32\cdot(-1)^{n+1}}{\pi^3(2n+1)^3}\cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)t.$$

3. Вернемся к переменной x, подставив в ряд Фурье вместо t выражение $t = x - 1$:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32\cdot(-1)^{n+1}}{\pi^3(2n+1)^3}\cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)\,(x - 1).$$

Краевые задачи для уравнений математической физики

Данной теме посвящены главы III и IV тематического обзора, где изложен теоретический материал и рассмотрены задачи и примеры. Поэтому перед решением примеров следует прочесть материал этих глав.

Пример 12. Рассматривается тонкий однородный металлический стержень длины $\ell = 1$. В начальном состоянии стержень неравномерно нагрет и распределение начальной температуры имеет вид $\varphi(x) = x^2 - 1$. Привести математическую формулировку задачи о распространении тепла в стержне, если боковая поверхность и левый конец его теплоизолированы, а правый конец поддерживается все время при нулевой температуре. Найти температуру точек стержня в любой момент времени.

Решение. 1. Уравнение, описывающее распространение тепла в стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована, имеет вид $U_t = a^2U_{xx}$, где U(x, t) - температура точки x стержня в момент времени t; $a = \sqrt{\frac{k}{C\rho}}$ - коэффициент температуропроводности (величина постоянная); k - коэффициент теплопроводности, C - удельная теплоемкость, ρ - плотность материала.

2. Начальное условие $U|_{t=0} = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - заданное распределение начальной температуры: $\varphi(x) = x^2 - 1$.

3. Граничное условие при x = 0 имеет вид $U_x|_{x=0} = 0$ (условие теплоизоляции левого конца).

Граничное условие при x = 1 имеет вид $U|_{x=1} = 0$ (условие нулевой температуры на правом конце).

4. Решим поставленную задачу методом Фурье. Будем искать решение уравнения в виде U(x,t) = X(x)T(t). После подстановки этой функции в уравнение и разделения переменных получим

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

или

$$\text{а) } T' + \lambda a^2 T = 0,$$

$$\text{б) } X'' + \lambda X = 0.$$

При подстановке граничных условий в функцию U(x, t) = X(x)T(t) в граничные условия будем иметь:

$$U_x|_{x=0} = 0 \Rightarrow X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0;$$

$$U|_{x=1} = 0 \Rightarrow X(1)T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0.$$

5. При решении задачи Штурма-Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0,\ X'(0) = X(1) = 0,$$

оспользуемся результатами примера 10: в п. 1 для задачи (*), которая точности совпадает с нашей задачей, выписаны собственные функции собственные значения. В наших обозначениях они имеют вид

$$X_n = \cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)x,\ \lambda_n = \frac{\pi^2}{4}(2n + 1)^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

6. Решим первое уравнение а), подставив в него найденные начения λ:

$$T'_n + \frac{\pi^2}{4}(2n + 1)^2 a^2 T_n = 0 \Rightarrow T_n = A_n e^{\frac{-\pi^2(2n+1)^2}{4}a^2 t}.$$

7. Выпишем частные решения уравнения теплопроводности:

$$U_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)x\, e^{\frac{-\pi^2(2n+1)^2}{4}a^2 t}.$$

силу линейности и однородности уравнения теплопроводности сумма ешений

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)x\, e^{\frac{-\pi^2(2n+1)^2}{4}a^2 t} \qquad (**)$$

акже является решением этого уравнения.

8. Определим коэффициенты A_n, используя начальное условие:

$$U(x, 0) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)x = \varphi(x).$$

оследнее равенство означает, что функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд урье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

Так как $\varphi(x) = x^2 - 1$, опять воспользуемся результатами примера 10:

п. 2 вычислены коэффициенты Фурье для этой функции: $A_n = \frac{32 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi^3 (2n+1)^3}$.

9. Подставим найденные коэффициенты в (**) и выпишем решение адачи

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi^3 (2n+1)^3} \cos\frac{\pi}{2}(2n + 1)x\, e^{\frac{-\pi^2(2n+1)^2}{4}a^2 t}.$$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C;$

2. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C;$

3. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin 2ax + C;$

4. $\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\cos 2ax + C;$

5. $\int \cos ax \sin bx\,dx = \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + C;$

   ($a^2 \neq b^2$);

6. $\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C;$

   ($a^2 \neq b^2$);

7. $\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C;$

   ($a^2 \neq b^2$);

8. $\int x \cos ax\,dx = \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax + C;$

9. $\int x \sin ax\,dx = -\frac{x}{a}\cos ax + \frac{1}{a^2}\sin ax + C;$

10. $\int (ax+b)\cos kx\,dx = \frac{ax+b}{k}\sin kx + \frac{a}{k^2}\cos kx + C;$

11. $\int (ax+b)\sin kx\,dx = -\frac{ax+b}{k}\cos kx + \frac{a}{k^2}\sin kx + C;$

12. $\int x^2 \cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax + C;$

13. $\int x^2 \sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos ax + C;$

14. $\int (ax^2 + bx + c)\cos kx\,dx = \frac{2ax+b}{k^2}\cos kx + \left(\frac{ax^2+bx+c}{k} - \frac{2a}{k^3}\right)\sin kx + C_1;$

15. $\int (ax^2 + bx + c)\sin kx dx = \frac{2ax+b}{k^2}\sin kx - (\frac{ax^2+bx+c}{k} - \frac{2a}{k^3})\cos kx + C_1;$

16. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C;$

17. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C;$

18. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C;$

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
Казахстанско-Российский университет
Объем 7,3 Тираж 1046